Quantenmechanik II. Übung 3.

FS 11 — *Abgabe:* Di 15. März 2011

1. Ammoniak-Maser

Systeme, bei denen es nur auf einen zwei-wertigen Freiheitsgrad ankommt, haben dieselbe allgemeine Beschreibung wie ein Spin-$\frac{1}{2}$. Ein Beispiel ist das Ammoniak-Molekül NH_3: Das N-Atom kann sich auf einer der beiden Seiten der Ebene befinden, die durch die H-Atome aufgespannt wird. Das Molekül besitzt die entsprechenden Zustände $|+\rangle$, $|-\rangle$ mit Dipolmoment $\pm\delta$. Grund- und angeregter Zustand des Moleküls sind

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\ , \qquad |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)\ ,$$

mit Energiedifferenz ε.

Moleküle werden im Zustand $|a\rangle$ in eine Kavität injiziert. Dort werden sie durch ein zur Ebene senkrechtes elektrisches Feld $E(t)$ stimuliert, einen Übergang nach $|g\rangle$ zu machen. (Die dabei ausgesandte Strahlung verstärkt das Feld: "Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation").

i) Begründe: Der Hamiltonoperator in der Basis $|a\rangle$, $|g\rangle$ ist

$$H(t) = \frac{\varepsilon}{2}\sigma_3 - \delta\,\vec{E}(t)\cdot\vec{\sigma} \tag{1}$$

mit $\vec{E}(t) = E(t)\vec{e}_1$.

ii) Für $E(t) = E\cos(\omega t)$ wird die Lösung der Schrödinger-Gleichung vereinfacht durch die sogenannte *Approximation der rotierenden Welle*:

$$\vec{E}(t) = \frac{E}{2}(\vec{e}_1\cos(\omega t) + \vec{e}_2\sin(\omega t))\ .$$

Wie ist die Frequenz ω und die Aufenthaltsdauer $0 \le t \le t_0$ in der Kavität zu wählen, damit die Moleküle am Schluss im Zustand $|g\rangle$ sind?

Hinweis: Rechnungen können weitgehend vermieden werden durch Verwendung der Resultate von Aufgabe 2.3.

2. Der quantenmechanische Kreisel

Der klassische freie Kreisel hat die Energie

$$H = \sum_{i=1}^{3}\frac{L_i^2}{2\theta_i} \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i L_i^2 \tag{2}$$

wobei $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ die Komponenten des Drehimpulses im (körperfesten) Hauptachsensystem und θ_i die Hauptträgheitsmomente sind.

Ohne Herleitung: Quantenmechanisch ist der Hilbertraum $L^2(\mathrm{SO}(3))$ und er trägt eine Darstellung der SO(3). Diese zerfällt in irreduzible Darstellungen $\mathcal{D}_l$, ($l = 0, 1, 2, \ldots$), wobei jede mit Vielfachheit $2l+1$ kommt. Der Hamiltonoperator ist (2). Aufgabenstellung ist es, seine Eigenwerte im Teilraum $\mathcal{D}_2$ zu finden. Die Normalbasis darin sei $|m\rangle$ ($m = -2, \ldots, 2$).

i) Zeige: $\langle m'|H|m\rangle \neq 0$ nur für $m' - m = 0, \pm 2$. Finde damit zwei Teilräume $\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'' = \mathcal{D}_2$, die unter H invariant sind.

Hinweis: Drücke L_i durch L_3, $L_\pm$ aus.

ii) Sei $U\colon \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_2$ definiert durch $U|m\rangle = |-m\rangle$. Zeige, dass U eine Symmetrie von H ist, also $[H, U] = 0$, und finde damit jeweils zwei H-invariante Teilräume von $\mathcal{H}'$ und $\mathcal{H}''$.

Hinweis: Zeige $L_+ U = U L_-$.

iii) Berechne die Matrixelemente von H in diesen Teilräumen und finde die jeweiligen Eigenwerte.

Hinweis: Das Ergebnis in Einheiten von $\hbar^2$ ist

$$\begin{gathered} 2(a_1 + a_2 + a_3) \pm 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3}\ , \\ a_1 + a_2 + 4a_3\ , \qquad a_1 + 4a_2 + a_3\ , \qquad 4a_1 + a_2 + a_3\ . \end{gathered} \tag{3}$$

iv) Im Fall des symmetrischen Kreisels, $a_1 = a_2$, können die Eigenwerte einfacher berechnet werden. Verifiziere ihre Übereinstimmung mit (3).