

Quantenmechanik II. Übung 8.

FS 11

Abgabe: Di 19. April 2011

1. Fermi-Druck

i) In der Vorlesung wurde die Grundzustandsenergie

$$\frac{E_0}{V} = \frac{\hbar^2}{2m} (2j + 1) \frac{1}{10\pi^2} k_F^5$$

freier nicht-relativistischer Fermionen

$$\varepsilon_{\vec{k},\sigma} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}, \quad (\sigma = -j, \dots, j)$$

mit Spin j berechnet. Es folgt, dass das Gas einen Druck

$$p = - \left(\frac{\partial E_0}{\partial V} \right)_N$$

ausübt. Berechne ihn.

ii) Berechne E_0/V und p für den Fall ultra-relativistischer Fermionen, $\varepsilon_{\vec{k},\sigma} = \hbar c |\vec{k}|$.

2. Weisser Zwerg, Teil 1

Ein weisser Zwerg ist ein Stern der über sukzessive Kernfusionen seinen Brennstoff aufgebraucht hat und fast nur noch aus C und O besteht. Er findet sein Gleichgewicht im energetischen Minimum zwischen der gravitationellen Energie der Kerne und der kinetischen Energie der Elektronen. Dort wirkt der Gravitationsdruck der Kerne dem Druck des Fermi-Gases der Elektronen entgegen.

Bemerkungen: 1) Seien m_0 (bzw. m) die Masse eines Kerns (bzw. Elektrons). Wegen $m_0 \gg m$ sind die Gravitationskräfte der Elektronen, bzw. der Druck der Kerne vernachlässigbar.

2) Die Coulomb-Wechselwirkung entfällt, da die Materie lokal neutral ist: Die Ladungsdichte der Kerne kompensiert die der Elektronen punktweise. Insbesondere: Ist N die Anzahl der Elektronen, so N/Z die der Kerne (Z Kernladungszahl).

3) Die kinetische Energie der Elektronen ist relativistisch: $\varepsilon(\vec{p}) = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$.

i) Stelle die Thomas-Fermi Gleichung des Sterns auf und zwar gleich als Selbstkonsistenzbedingung zwischen dem Gravitationspotential $\phi(\vec{x})$ und der Dichte $n(\vec{x})$ der Elektronen. Anstelle der Dichte verwende jedoch den lokalen Fermi-Impuls $p_F(\vec{x}) = \hbar k_F(\vec{x})$,

$$n(\vec{x}) = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3(\vec{x}). \quad (1)$$

Anders gesagt: Bestimme die Gleichung, die beim Übergang vom Atom zum Stern anstelle von

$$\frac{p_F^2(\vec{x})}{2m} = (\mu - |e|\phi(\vec{x}))_+$$

($\phi(\vec{x})$): elektrisches Potential) tritt.

ii) Stelle die Poisson-Gleichung für $\phi(\vec{x})$ auf und eliminiere $\phi(\vec{x})$ aus beiden Gleichungen zugunsten von $p_F(\vec{x})$.

iii) Spezialisiere die resultierende Gleichung auf den sphärisch symmetrischen Fall und versuche, sie auf dimensionslose Form zu bringen. Reskaliere dazu die radiale Variable $r = \lambda\xi$ mit passendem Parameter λ und verwende als Feldgrösse (im Wesentlichen) die lokale Fermi-Energie

$$\varphi(\xi) = z_c^{-1} \sqrt{1 + (p_F(\vec{x})/mc)^2},$$

wobei z_c durch $\varphi(\xi = 0) = 1$ definiert ist. Der Parameter $1 \leq z_c < \infty$ beschreibt, wie relativistisch das Fermi-Gas im Mittelpunkt des Sterns ist ($z_c = 1$ nicht-relativistisch, $z_c = \infty$ ultra-relativistisch); er ersetzt μ oder N als Kenngrösse des Sterns. Das Ergebnis ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für $\varphi(\xi) > z_c^{-1}$ in $\xi \geq 0$ (Chandrasekhar-Gleichung).

Hinweis: Auf sphärisch symmetrische Funktionen angewandt ist $\Delta = r^{-2}(d/dr)r^2(d/dr)$.

Wie lautet die Randbedingung für $\varphi'(\xi = 0)$?