

Quantenmechanik II. Übung 9.

FS 11

Abgabe: Di 3. Mai 2011

1. Weisser Zwerg, Teil 2

Es soll gezeigt werden, dass (a) für kleine Sternmassen M eine Masse-Radius Beziehung der Form $MR^3 = \text{konst}$ gilt; (b) es eine kritische Masse M_* (Chandrasekhar-Masse) gibt so, dass der Stern instabil gegen Kollaps ist, falls $M \geq M_*$.

Zwei Überlegungen führen unabhängig voneinander zum Ziel: Eine (i), die bloss auf Grössenordnungen achtet, und eine (ii-iv) die quantitativ präzise ist.

i) Betrachte den Stern in grober Näherung als eine Kugel vom Radius R aus N Elektronen und N/Z Kernen auf (Z Kernladungszahl). Wie gross ist der Fermi-Impuls $p_F = \hbar k_F$? Schätze die (relativistische) kinetische Energie des Sterns so, als ob alle Elektronen Impuls p_F hätten; und die (gravitationelle) potentielle Energie, als ob alle Paare Abstand R hätten. Minimiere die Summe der kinetischen und potentiellen Energie als Funktion von R . Wie verhält sich der optimale Radius R als Funktion von N ? Zeige

$$M_* \approx \frac{(\hbar c)^{3/2}}{G^{3/2} m_0^2},$$

wobei alle dimensionslosen Faktoren gleich 1 gesetzt wurden.

ii) Verwende die Chandrasekhar-Gleichung

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = - \left(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2} \right)^{3/2} \quad (1)$$

für $z_c \varphi > 1$ und Randbedingungen $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, wobei $\varphi(\xi)$ und z_c in Teil 1 der Aufgabe definiert wurden:

$$\varphi(\xi) = z_c^{-1} \sqrt{1 + (p_F(r)/mc)^2}, \quad (r = \lambda \xi). \quad (2)$$

Sei ξ_1 so, dass $z_c \varphi(\xi_1) = 1$.

Leite die Masse-Radius Beziehung des Sterns her, und zwar in der parametrischen Form

$$R = \frac{\xi_1}{K z_c}, \quad (3)$$

$$M = \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{1/2} \xi_1^2 |\varphi'(\xi_1)| \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{(m_0/Z)^2}, \quad (4)$$

wobei $\varphi'(\xi_1) < 0$.

Hinweis: Drücke die Dichte $\rho(r)$ in $M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr$ durch $p_F(r)$ und schliesslich durch $\varphi(\xi)$ aus.

iii) Schliesse daraus, dass der ultra-relativistische Grenzfall ($z_c \rightarrow \infty$) einer kritischen Masse M_* entspricht mit $R \rightarrow 0$ (Kollaps). Zur quantitativen Auswertung, verwende dass in diesem Fall

$$\xi_1 = 6.897, \quad \xi_1^2 \varphi'(\xi_1) = -2.018. \quad (5)$$

Drücke das Resultat für M_* in Einheiten der Sonnenmasse $M_\odot = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg aus.

iv) Im nicht-relativistischen Fall ($z_c \rightarrow 1$) ist es zweckmässig, die Ruheenergie mc^2 von der Fermi-Energie abzuziehen: $f := z_c \varphi - 1$, womit $f(0) = z_c - 1$, $f(\xi_1) = 0$. Schreibe die Gl. (1) um auf $0 < f \ll 1$ und erhalte

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{df}{d\xi} \right) = -(2f)^{3/2} \quad (6)$$

mit $f'(0) = 0$. Zeige, dass $f'(\xi_1) \propto \xi_1^{-5}$ und damit $MR^3 = \text{konst.}$

Hinweis: Mit $f(\xi)$ ist auch $a^4 f(a\xi)$, ($a > 0$) eine Lösung (wieso?).

Quantitative Auswertung:

$$f'_0(1) = -16.55$$

für die Lösung mit $f_0(1) = 0$.

2. Zu den Hund'schen Regeln

Betrachte die Konfiguration einer offenen Schale (d)² und berechne ihre Vielfachheit. Zerlege sie nach Multipletts ^{2S+1}L (L, S : Bahndrehimpuls, Spin aller Elektronen in der Schale). Bestimme das Multiplett des Grundzustands. Zerlege es weiter nach Termen $^{2S+1}L_J$. Welcher Term entspricht dem Grundzustand unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung?

Hinweis: Notation: Der Reihe nach ist

$$\begin{aligned} l = 0, 1, 2, 3, 4 : & \quad s, p, d, f, g \\ L = 0, 1, 2, 3, 4 : & \quad S, P, D, F, G \end{aligned}$$