Quantenmechanik II. Übung 13.

FS 11 *Abgabe:* Di 31. Mai 2011

1. Hohlraumstrahlung

i) Das quantisierte elektromagnetische Feld wurde als Sammlung unabhängiger harmonischer Oszillatoren betrachtet. Sein thermisches Gleichgewicht (Hohlraumstrahlung) und insbesondere die kanonische Zustandsumme wurden bereits in Kap. 1 der QM I behandelt. Behandle das Feld (leicht) alternativ als ideales Gas von Photonen (Bosonen!) mit Energien $\varepsilon_{\vec{k},\lambda} = \hbar c|\vec{k}|$ ($\vec{k}$: Wellenvektor, $\lambda = 1, 2$: Polarisation). Zeige, dass man dieselbe Zustandssumme $Z(\beta, V)$ erhält. Berechne daraus die mittlere Energie U und freie Energie F.

Hinweis: Wegen $\Omega = F - \mu N$ erhält man F, indem man in der grosskanonischen Gesamtheit des Gases kurzerhand $\mu = 0$ setzt. Dies ist bloss formal: das chemische Potential μ als eine zur Teilchenzahl N konjugierte Variable ist nur dann sinnvoll, wenn im abgeschlossenen System N fest und insbesondere erhalten ist. Die Zahl der Photonen ist es aber nicht, da sie in Anwesenheit von Materie absorbiert und emittiert werden können.

ii) Zeige, dass die Entropie pro Photon s unabhängig von der Temperatur ist, und zwar

$$\frac{s}{k} = 4\,\frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} \simeq 3.60\,,$$

mit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

Hinweis: $s = S/N$ mit $S = (U - F)/T$.

2. Bose-Einstein Kondensation in $d = 2$?

Berechne die grosskanonische Zustandsumme $\Xi(z, V, T)$ ($z = \mathrm{e}^{\beta\mu}$: Fugazität) für das d-dimensionale Bose Gas. Leite daraus für $d = 2, 3$ die mittlere Teichendichte $n = \langle N\rangle/V$ als Funktion der Fugazität und der Temperatur T her. Zeige damit, dass das ideale Bose Gas für $d = 2$ nicht kondensiert.