(9) Integrable Hamiltonsche Systeme

In diesem Abschnitt studieren wir eine spezielle Klasse Hamiltonscher mechanischer Systeme, die man integrabel nennt. Der Phasenraum, Γ, sei $2f$-dimensional. Wir versehen Γ mit einem Atlas von Karten in Darboux Koordinaten, so dass $\omega = \mathring{\omega} = \frac{1}{2} dx^T J dx$, (wo ω die sympl. 2-Form ist, und $x = (x^1, \ldots, x^{2f})$ lokale Koo.). Die Hamiltonschen Bewegungsgln. lauten dann

$$\dot{x}(t) = J \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)).$$

Wir untersuchen, unter welchen Annahmen diese Gln. durch "Quadraturen" (d.h. Integrale und Inversion von Abbildungen) gelöst werden können, falls es hinreichend viele Erhaltungssätze gibt, und wir identifizieren die Natur des von X_H erzeugten kanonischen Flusses; ("invariante Tori").

Wir beginnen damit, einige zentrale Hilfsmittel zu rekapitulieren.

Definition Zwei Funktionen, F und G, auf dem Phasenraum, Γ, unseres mechanischen Systems, sind in <u>Involution</u>, falls

$$\{F,G\}(x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma. \tag{3.115}$$

Die von F und G bestimmten Hamiltonschen Vektorfelder sind

$$X := X_F = +J\frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y := X_G = +J\frac{\partial G}{\partial x}. \tag{3.116}$$

X und Y erzeugen kanonische Flüsse ψ_t, respektive φ_t, $t \in \mathbb{R}$.

Es seien momentan X und Y zwei <u>beliebige</u> (<u>nicht</u> notwendig Hamilton'sche) Vektorfelder mit Flüssen ψ_t, resp. φ_t. Sei f irgendeine glatte Funktion auf Γ. Wir definieren

$$(e^{tL_X}f)(x) := f(\psi_t(x)). \tag{3.117}$$

Dann haben wir

$$(L_X f)(x) = \frac{d}{dt} f(\psi_t(x))\Big|_{t=0}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T(x) \; \frac{d\psi_t(x)}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T(x)\, X(x)$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{2f} X^j(x)\, \frac{\partial f}{\partial x^j}(x), \qquad (3.118)$$

(in lokalen Koordinaten $x^1, \dots, x^{2f}$).

Gegeben zwei Vektorfelder $X = (X^j)_{j=1,\dots,2f}$ und $Y = (Y^j)_{j=1,\dots,2f}$, definieren wir ein Vektorfeld $[X, Y] = ([X, Y]^j)_{j=1,\dots,2f}$, indem wir

$$[X, Y]^j(x) := \sum_{i=1}^{2f}\left(X^i(x)\,\frac{\partial Y^j(x)}{\partial x^i} - Y^i(x)\,\frac{\partial X^j(x)}{\partial x^i}\right) \qquad (3.119)$$

setzen.

Gl. (3.118) gibt, dass

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{tL_X} e^{sL_Y} f\right)(x)\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} f(\varphi_s(\psi_t(x)))\Big|_{s=0}$$

$$= (L_Y f)(\psi_t(x)) =: g(\psi_t(x)).$$

Also

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s}\left(e^{tL_X} e^{sL_Y} f\right)(x)\Big|_{t=s=0} = \frac{d}{dt}\, g(\psi_t(x))\Big|_{t=0}$$

$$= (L_X g)(x)$$

$$= (L_X L_Y f)(x),$$

und (ebenso)

$$\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\left(e^{sL_Y} e^{tL_X} f\right)(x)\Big|_{t=s=0} = (L_Y L_X f)(x)$$

Also

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}\left(e^{tL_X} e^{sL_Y} - e^{sL_Y} e^{tL_X}\right) f(x)$$

$$= ((L_X L_Y - L_Y L_X) f)(x)$$

$$= (L_{[X,Y]} f)(x). \qquad (3.120)$$

Man nennt L_X die von X bestimmte Lie'sche Ableitung (= Richtungsableitung). Die Lie'sche Ableitung, $L_X(Y)$, eines Vektorfeldes Y in Richtung von X ist wie folgt definiert:

$$(L_{L_X(Y)} f)(x) = \frac{d}{dt}\left(e^{tL_X} L_Y e^{-tL_X} f\right)(x)\Big|_{t=0}$$

$$= ((L_X L_Y - L_Y L_X) f)(x)$$

$$= (L_{[X,Y]} f)(x), \qquad (3.121)$$

d.h.
$$L_X(Y) = [X, Y]. \tag{3.122}$$

Es sei Z das durch die Gleichung
$$(L_Z f)(x) := \left(e^{tL_X} L_Y \, e^{-tL_X} f\right)(x) \tag{3.123}$$
definierte Vektorfeld. Aus (3.117) und (3.118) folgt, das

$$(L_Z f)(x) \underset{(3.118)}{=} \sum_{i=1}^{2f} Z^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

$$\underset{(3.123),(3.117)}{=} \sum_{i,j=1}^{2f} Y^j(\psi_t(x)) \frac{\partial \psi_{-t}^i}{\partial x^j}(\psi_t(x)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

d.h.
$$Z^i(x) = \sum_{j=1}^{2f} \frac{\partial \psi_{-t}^i}{\partial x^j}(\psi_t(x)) Y^j(\psi_t(x)), \tag{3.124}$$

(für $|t|$ klein genug). Daraus folgt, dass

$$\left(e^{sL_Z} f\right)(x) = \left(e^{tL_X} e^{sL_Y} e^{-tL_X} f\right)(x), \tag{3.125}$$

(für $|t|$ und $|s|$ klein genug).

<u>Beweis.</u> Sei ξ_s der von Z erzeugte Fluss auf Γ und $\chi_s := \psi_{-t} \circ \underset{\text{Fluss zu } Y}{\varphi_s} \circ \psi_t$, $s \in \mathbb{R}$. Es gilt, das

$$\xi_0 = id., \quad \xi_{s_1} \circ \xi_{s_2} = \xi_{s_1 + s_2},$$

$$\chi_0 = id. \,, \quad \chi_{s_1} \circ \chi_{s_2} = \chi_{s_1+s_2} \,,$$

für beliebige s_1, s_2 in $\mathbb{R}$, (mit $|s_1|, |s_2|$ klein genug

Ausserdem gilt, dass

$$\frac{d}{ds} f(\xi_s(x))\Big|_{s=0} = (L_Z f)(x) \,, \quad \forall x \,,$$

$$\frac{d}{ds} f(\chi_s(x))\Big|_{s=0} = (e^{tL_X} L_Y e^{-tL_X} f)(x) \,, \quad \forall x \,,$$

für beliebige (stetig differenzierbare) Funktionen f auf Γ. Daraus folgt, dass $\xi_s = \chi_s$, $\forall s$, und damit ist (3.124) bewiesen.

<u>Lemma 1.</u> Es seien X und Y zwei Vektorfelder auf Γ (z. B. Lipschitz-stetig und beschränkt, und ψ_t, resp. φ_t die von ihnen erzeugten Flüsse. Dann gilt, dass

$$[X,Y] \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \psi_t \,, \quad \forall t,s,$$

(d.h. die Flüsse $\psi_\cdot$ und $\varphi_\cdot$ vertauschen).

<u>Beweis.</u> $\psi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \psi_t \Leftrightarrow \psi_{-t} \circ \varphi_s \circ \psi_t = \varphi_s$

Der Fluss $\chi_s := \psi_{-t} \circ \varphi_s \circ \psi_t$ wird vom Vektor–

feld Z (Gln. (3.124), (3.123)) erzeugt, wogegen φ_s von Y erzeugt wird. Da $\chi_s = \varphi_s$, $\forall s$, folgt $Z = Y$, oder

$$(L_Z f)(x) = (e^{tL_X} L_Y e^{-tL_X} f)(x) = (L_Y f)(x), \quad (3.126)$$

$\forall x \in \Gamma$, $\forall$ (stetig differenzierbaren) Funktionen f auf Γ.

Wir definieren

$$g(t;x) := (e^{tL_X} L_Y e^{-tL_X} f)(y).$$

Dann haben wir, dass

$$g(t;x) = g(0;x) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s;x)\, ds$$
$$= (L_Y f)(x) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s;x)\, ds,$$

wo

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x) = (e^{sL_X} [L_X, L_Y] e^{-sL_X} f)(x),$$

mit $[A,B] := AB - BA$. Gl. (3.121) besagt, dass

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]},$$

so dass

$$g(t;x) = (L_Y f)(x) + \int_0^t (e^{sL_X} L_{[X,Y]} e^{-sL_X} f)(x)\, ds \quad (3.127)$$

Falls $\chi_s = \varphi_s$, $\forall s$, d.h. $Z = Y$, folgt, dass

$$g(t;x) = g(0;x), \quad \forall t,$$

daher $L_{[X,Y]} = 0$, also $[X,Y] = 0$. Umgekehrt folgt aus $[X,Y]=0$, dass $L_{[X,Y]} = 0$ (Gl. (3.121)) und daher, dass $g(t;x) = g(0;x)$, $\forall t$, d.h. $Z = Y$. Da Z den Fluss $\psi_{-t}\circ\varphi_s\circ\psi_t$ und Y den Fluss φ_s erzeugt, folgt

$$\psi_{-t}\circ\varphi_s\circ\psi_t = \varphi_s\ , \quad \forall s,t.$$

Damit ist das Lemma bewiesen!

Seien $X = X_F$ und $Y = X_G$ Hamilton'sche Vektorfelder, wie in (3.116).

Lemma 2.

$$[X_F, X_G] = X_{\{F,G\}} \tag{3.128}$$

Beweis.

$$[X_F, X_G]^j(x) \underset{(3.119)}{=} \sum_{i=1}^{2f} \left(X_F^i(x)\,\frac{\partial X_G^j}{\partial x^i}(x) - X_G^i(x)\,\frac{\partial X_F^j}{\partial x^i}(x)\right)$$

$$= \sum_i \sum_l \sum_m \Big(J^{il}\frac{\partial F}{\partial x^l}(x)\, J^{jm}\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^m}(x)$$

$$- J^{il}\frac{\partial G}{\partial x^l}(x)\, J^{jm}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^m}(x)\Big)$$

$$= \sum_m J^{jm} \sum_{i,l} \Big(-J^{li} \frac{\partial F}{\partial x^l}(x) \, \frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^m}(x)$$

$$- J^{il} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^m}(x) \, \frac{\partial G}{\partial x^l}(x) \Big)$$

$$= \sum_m J^{jm} \frac{\partial}{\partial x^m} \Big(-\sum_{i,l} J^{li} \frac{\partial F}{\partial x^l} \frac{\partial G}{\partial x^i} \Big)$$

$$= -\Big(J \frac{\partial \{F,G\}}{\partial x} \Big)^j = X_{\{F,G\}} .$$

Q.E.D.

Korollar 3. Seien F und G zwei (stetig differenzierbare) Funktionen auf Γ und ψ_t, φ_t die von X_F, resp. X_G erzeugten kanonischen Flüsse.

Dann gilt

$$\psi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \psi_t \iff \{F,G\} = 0, \text{ (d.h. } F \text{ und } G \text{ sind in Involution).}$$

Nun sind wir dazu vorbereitet, den Satz von Liouville, Jacobi, Arnol'd und Jost zu formulieren und zu beweisen.

Satz. Es sei Γ der $2f$-dimensionale Phasenraum eines mechanischen Systems, und es seien $P_1, \dots, P_f$ f glatte Funktionen auf Γ, die miteinander in

Involution sind, d.h.

$$\{P_i, P_j\}(x) = 0, \quad \forall i,j, \tag{3.129}$$

$\forall x \in \Gamma$. Seien $\pi_1, \dots, \pi_f$ f reelle Zahlen. Wir definieren die Niveaufläche

$$M_{\underline{\pi}} := \{x \in \Gamma \mid P_j(x) = \pi_j, \ j = 1, \dots, n\} \tag{3.130}$$

Wir nehmen an, dass $M_{\underline{\pi}} \neq \emptyset$ und dass die f Vektoren $X_{P_1}(x), \dots, X_{P_f}(x)$ <u>linear unabhängig</u> sind, $\forall x \in M_{\underline{\pi}}$.

Dann gilt:

(1) $M_{\underline{\pi}}$ ist eine glatte (f-dimensionale) Teilmannigfaltigkeit von Γ; $M_{\underline{\pi}}$ ist invariant unter dem von X_K erzeugten kanonischen Fluss, wo $K = K(P_1, \dots, P_f)$ eine beliebige (stetig differenzierbare) Funktion von $P_1, \dots, P_f$ ist.

(2) Falls $M_{\underline{\pi}}$ kompakt und zusammenhängend ist, dann ist $M_{\underline{\pi}}$ diffeomorph zum f-dimensionalen Torus

$$\mathbb{T}^f = \{\varphi_1, \dots, \varphi_f \mid \varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \ i = 1, \dots, f\} \tag{3.131}$$

(3) Der kanonische Fluss zur Hamiltonfunktion K (wie in (1)) erzeugt eine quasi-periodische Bewegung auf $M_{\underline{\pi}}$, d.h.

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \omega_i\,, \quad \omega_i = \omega_i(\underline{\pi}),\ \forall i. \qquad (3.132)$$

(4) Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen zur Hamiltonfunktion K mit Anfangsbedingungen in $M_{\underline{\pi}}$ können durch <u>Quadraturen</u> (Inversion von Abbildungen und Integration) gelöst werden.

<u>Bemerkung.</u>

Falls $M_{\underline{\pi}}$ kompakt und zusammenhängend ist, und $X_{P_1}, \dots, X_{P_f}$ linear unabhängig sind auf $M_{\underline{\pi}}$, dann gibt es eine kleine offene Umgebung, U, von $\underline{\pi}$ so, dass

$$\Gamma_U := \bigcup_{\underline{\pi}' \in U} M_{\underline{\pi}'}$$

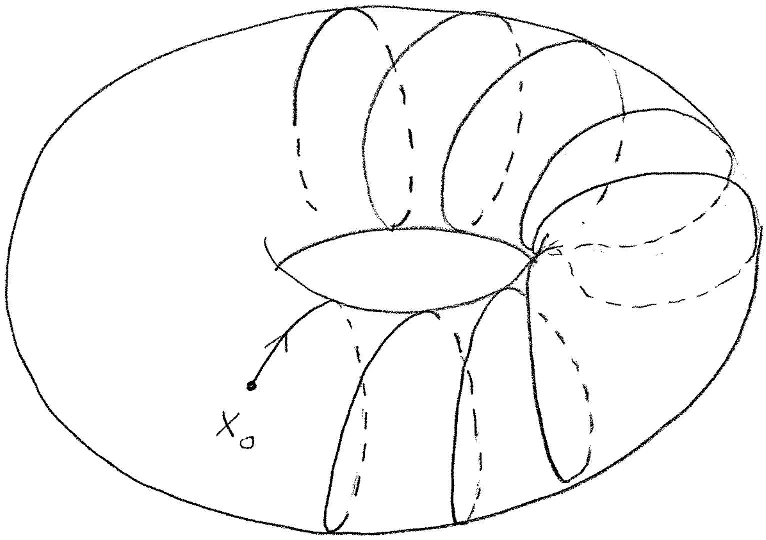
kompakt und zusammenhängend ist, und $X_{P_1}, \dots, X_{P_f}$ sind linear unabhängig auf Γ_U. Der Satz gilt dann für alle $\underline{\pi}' \in U$.

<u>Beispiele.</u>

(i) Eindimensionale Systeme; ($P_1 = H$)

(ii) Teilchen in der Ebene unter dem Einfluss einer Zentralkraft; ($P_1 = H$, $P_2 = L_\perp$).

Portrait des kanonischen Flusses auf $M_{\underline{\pi}} \simeq \mathbb{T}^2$.



(iii) Galilei-invariantes Zweikörperproblem;

((P_1, P_2, P_3) = Totalimpuls, $P_4 = \underline{L}^2_{rel.}$, $P_5 = L^z_{rel.}$, $P_6 = H$,

(iv) Schwerer, symmetrischer Kreisel, wie in Abschnitt 2.6.3; ($P_1 = H$, $P_2 = p_\varphi$ (Gl. (2.148)), $P_3 = p_\psi$ (Gl. (2.149)))

(v) Systeme, für die die verkürzte Hamilton-Jacobi Gleichung eine globale Lösung hat.

<u>Beweis des Satzes von L-J-A-J.</u>

<u>Beweis von (1).</u> Da $M_{\underline{\pi}} \neq \emptyset$, $P_1, \dots, P_f$ glatt und $X_{P_1}, \dots, X_{P_f}$ linear unabhängig auf $M_{\underline{\pi}}$, also

$\frac{\partial P_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial P_f}{\partial x}$ linear unabhängig auf $M_{\underline{\pi}}$, garantiert der Satz über implizite Funktionen, dass $M_{\underline{\pi}}$ eine f-dimensionale, glatte Teilmannigfaltigkeit ("Fläche") von Γ ist.

Sei $x \in M_{\underline{\pi}}$ und sei ϕ_t der zu K gehörige, kanonische Fluss auf Γ. Dann gilt

$$P_i(x) = \pi_i, \quad \forall i,$$

und

$$\frac{d}{dt} P_i(\phi_t(x)) = \{K, P_i\}(\phi_t(x)) = 0,$$

da $K = K(P_1, \ldots, P_f)$; (Übung!). Daher

$$P_i(\phi_t(x)) = P_i(x) = \pi_i, \quad \forall t, \forall i.$$

Es folgt, dass $\phi_t(x) \in M_{\underline{\pi}}$. Damit ist (1) bewiesen.

<u>Bemerkung.</u> $M_{\underline{\pi}}$ ist invariant unter allen von den Vektorfeldern X_{P_j} erzeugten Flüssen, ϕ_t^j. Denn für $x \in M_{\underline{\pi}}$ gilt $P_i(x) = \pi_i$ und

$$\frac{d}{dt} P_i(\phi_t^j(x)) = \{P_j, P_i\}(\phi_t^j(x)) = 0,$$

also

$$P_i(\phi_t^j(x)) = P_i(x) = \pi_i, \quad \forall\, i,j,t.$$

Daher ist $\phi_t^j(x) \in M_{\underline{\pi}}$, $\forall\, x \in M_{\underline{\pi}}$, $\forall j$, $\forall t$.

Daraus folgt, dass $X_{P_j}(x)$ <u>tangential</u> zu $M_{\underline{\pi}}$ ist, $\forall\, x \in M_{\underline{\pi}}$, $\forall j$. Da $X_{P_1}(x), \dots, X_{P_f}(x)$ für alle $x \in M_{\underline{\pi}}$ linear unabhängig sind, bilden sie daher eine Basis des Tangentialraumes an $M_{\underline{\pi}}$ im Punkte x. Da $\{P_i, P_j\} = 0$, $\forall\, i,j$, verschwindet die symplektische 2-Form auf den Tangentialräumen an $M_{\underline{\pi}}$. Ausserdem folgt aus Korollar 3, dass die Flüsse ϕ_t^j alle miteinander vertauschen, d.h.

$$\phi_{t_i}^i \circ \phi_{t_j}^j = \phi_{t_j}^j \circ \phi_{t_i}^i, \quad \forall\, i,j, \qquad (3.133)$$

$\forall\, t_i \in \mathbb{R}$, $t_j \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis von (2).</u> Wir benützen das folgende Lemma.

<u>Lemma 4.</u> Es sei M^f eine kompakte, zusammenhängende, differenzierbare, f-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es seien $X_1, \dots, X_f$ f Vektorfelder, die überall auf M^f linear unabhängig sind, und

$$[X_i, X_j](x) = 0 \ , \quad \forall x \in M^f, \tag{3.134}$$

$\forall i,j = 1, \dots, f$. Dann ist

$$M^f \simeq \mathbb{T}^f.$$

<u>Beweis.</u> Sei ϕ_t^j der von X auf M^f erzeugte Fluss. Annahme (3.134) und Lemma 1 implizieren, dass

$$\phi^i_{t_i} \circ \phi^j_{t_j} = \phi^j_{t_j} \circ \phi^i_{t_i} \ , \quad \forall i,j, \tag{3.135}$$

$\forall t_i \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{R}$. Die Flüsse $\phi^1_{t_1}, \dots, \phi^f_{t_f}$ definieren eine Darstellung (Aktion) der (abelschen) additiven Gruppe von $\mathbb{R}^f$ auf M^f:

$$\underline{t} := (t_1, \dots, t_f) \in \mathbb{R}^f \longmapsto \phi_{\underline{t}} := \phi^1_{t_1} \circ \dots \circ \phi^f_{t_f} \ . \tag{3.136}$$

Wegen Gl. (3.135) spielt die Reihenfolge auf der R.S. von (3.136) keine Rolle, und es gilt, dass

$$\phi_{\underline{t}} \circ \phi_{\underline{s}} = \phi_{\underline{t}+\underline{s}} \ , \quad \phi_{\underline{0}} = id. \tag{3.137}$$

Gegeben $x_0 \in M^f$, definieren wir eine Abbildung $\underline{\phi}_{x_0}$ von $\mathbb{R}^f$ nach M^f, indem wir

$$\underline{\phi}_{x_0}(\underline{t}) := \phi_{\underline{t}}(x_0) \in M^f \tag{3.138}$$

setzen. Wir machen die folgenden Behauptungen:

(a) Es gibt eine offene Umgebung V von $\underline{0} \in \mathbb{R}^f$ und, für jeden Punkt $x_0 \in M^f$, eine offene Umgebung V_{x_0} von x_0 in M^f so, dass

$$\Psi_{x_0} : V \xrightarrow{1-1} V_{x_0} \, , \left(\underline{t} \longmapsto \psi_{\underline{t}}(x_0) \right)$$

ein Diffeomorphismus von V auf V_{x_0} ist; (insbesondere ist Ψ_{x_0} eine 1-1 Abbildung von V auf V_{x_0}).

<u>Beweis.</u> $X_1(x), \dots, X_f(x)$ sind linear unabhängig, $\forall x \in M^f$. Weiter gilt, dass

$$\frac{\partial \psi_{\underline{t}}(x_0)}{\partial t_i} = X_i\left(\psi_{\underline{t}}(x_0)\right), \ \forall i ;$$

(Gln. (3.136) und (3.135)). Es folgt, dass

$$\det \left(\frac{\partial \Psi_{x_0}}{\partial \underline{t}}(\underline{t}) \right) \neq 0 ,$$

$\forall \underline{t}$, und $\Psi_{x_0}(\underline{0}) = x_0$. Der Satz über die Existenz inverser Funktionen (Abbildungen) garantiert dann, dass es eine offene Umgebung V von $\underline{0}$ und eine offene Umgebung V_{x_0} von x_0 gibt so, dass $\Psi_{x_0} : V \to V_{x_0}$ ein Diffeomorphismus ist. Damit ist (a) bewiesen.

(b) Offenbar ist

$$\bigcup_{x_0 \in M^f} V_{x_0}$$

eine Überdeckung von M^f durch offene Mengen. Da M^f kompakt ist, impliziert der Satz von Heine-Borel dass es Punkte $x_1, \dots, x_n$ $(n < \infty)$ gibt so, dass

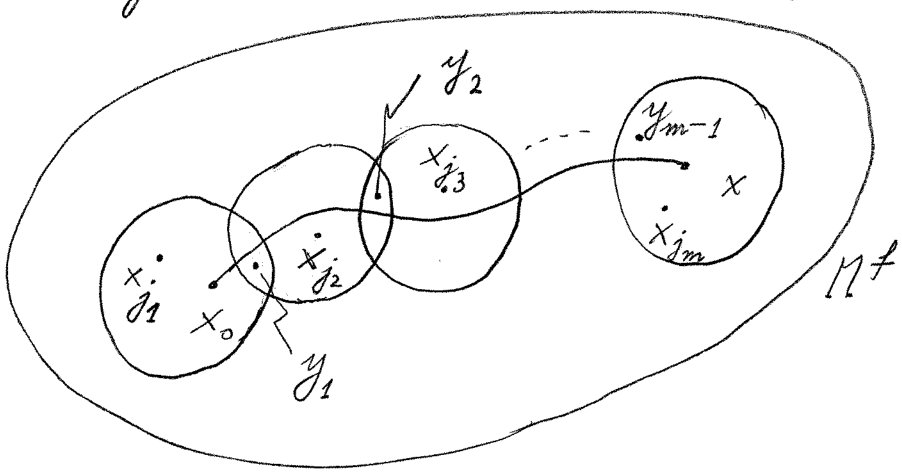
$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = M^f.$$

Wir behaupten nun, dass für irgendeine Wahl von $x_0 \in M^f$ die Abbildung

$$\underline{\psi}_{x_0} : \underline{t} \in \mathbb{R}^f \longmapsto \psi_{\underline{t}}(x_0) \in M^f$$

"auf" ist; d.h. $\mathrm{Bild}(\underline{\psi}_{x_0}) = M^f$.

Denn sei $x \in M^f$. Wir verbinden x mit x_0 durch eine stetige Kurve γ, wie in der Figur angedeutet.



Offenbar gibt es endlich viele Punkte $x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ in M^f so, dass $\gamma \subset \bigcup_{\alpha=1}^{m} V_{x_{j_\alpha}}$. Wegen (a) gibt es $\underline{t}_1$ so, dass $\psi_{\underline{t}_1}(x_0) = x_{j_1}$, und $\underline{t}_1'$ so, dass

$$\psi_{\underline{t}_1' + \underline{t}_1}(x_0) = \psi_{\underline{t}_1'}(x_{j_1}) = y_1 .$$

Weiter gibt es $\underline{t}_2$ so, dass $\psi_{\underline{t}_2}(y_1) = x_{j_2}$, und $\underline{t}_2'$ so, dass

$$\psi_{\underline{t}_2' + \underline{t}_2}(y_1) = \psi_{\underline{t}_2'}(x_{j_2}) = y_2 ;$$

etc. Für $\underline{t} = \sum_{\alpha=1}^{m} \underline{t}_i + \underline{t}_i'$ gilt dann offenbar, dass

$$\psi_{\underline{t}}(x_0) = x .$$

Dies beweist unsere Behauptung.

Da $\mathbb{R}^f$ nicht-kompakt, M^f jedoch kompakt ist, können die Abbildungen ψ_{x_0} $(x_0 \in M^f)$ global <u>nicht</u> <u>eineindeutig</u> sein. Wir wollen nun die Struktur der Menge der Urbilder

$$\{ \psi_{x_0}^{-1}(x) \mid x_0, x \text{ feste Punkte in } M^f \}$$

von x unter ψ_{x_0} untersuchen. Wir definieren

$$\mathcal{G} := \{ \underline{t} \in \mathbb{R}^f \mid \psi_{\underline{t}}(x_0) = x_0 \}. \qquad (3.139)$$

(c) $\mathcal{G}$ ist eine <u>Untergruppe</u> von $\mathbb{R}^f$, und $\mathcal{G}$ ist <u>unabhängig</u> von $x_0 \in M^f$.

<u>Beweis.</u> Für $\underline{s}$ und $\underline{t}$ in G gilt

$$\psi_{\underline{t}+\underline{s}}(x_0) = \psi_{\underline{t}}(\psi_{\underline{s}}(x_0)) = \psi_{\underline{t}}(x_0) = x_0;$$

also $\underline{t}+\underline{s} \in G$. Weiter gilt für $\underline{t} \in G$, dass

$$x_0 = \psi_{-\underline{t}}(\psi_{\underline{t}}(x_0)) = \psi_{-\underline{t}}(x_0), \text{ also } -\underline{t} \in G.$$

Schliesslich gehört $\underline{0}$ zu G; und es ist bewiesen, dass G eine Untergruppe ist.

Sei x ein beliebiger Punkt von M^f. Nach (b) gibt es $\underline{r} \in \mathbb{R}^f$ so, dass $\psi_{\underline{r}}(x_0) = x$. Sei $\underline{t} \in G$. Dann haben wir, dass

$$\psi_{\underline{t}}(x) = \psi_{\underline{t}} \circ \psi_{\underline{r}}(x_0) = \psi_{\underline{r}} \circ \psi_{\underline{t}}(x_0) = \psi_{\underline{r}}(x_0) = x,$$

d.h. $\psi_{\underline{t}}(x) = x, \ \forall\, \underline{t} \in G, \ \forall x \in M^f$.

Der Beweis ist vollständig.

(d) Für jedes $\underline{t} \in G$ gibt es eine offene Umgebung U von $\underline{t}$ in $\mathbb{R}^f$ so, dass

$$U \setminus \{\underline{t}\} \not\subset G.$$

<u>Beweis.</u> Wegen (a) gibt es eine offene Umgebung V von $\underline{0} \in \mathbb{R}^f$ so, dass

$$\psi_{x_0} : V \longrightarrow \psi_{x_0}(V) \subset M^f$$

eineindeutig ist. Daraus folgt, dass für alle $\underline{s} \in V$, $\underline{t} \in \mathcal{G}$,

$$\psi_{x_0}(\underline{t}+\underline{s}) = \psi_{\underline{t}+\underline{s}}(x_0) = \psi_{\underline{s}} \circ \psi_{\underline{t}}(x_0) = \psi_{\underline{s}}(x_0)$$

verschieden von x_0 ist, falls $\underline{s} \neq \underline{0}$. Es folgt, dass für alle $\underline{r} \in U := V + \underline{t}$

$$\psi_{\underline{r}}(x_0) \neq x_0\,, \quad \text{für } \underline{r} \neq \underline{t},$$

d.h. $U \setminus \{\underline{t}\} \cap \mathcal{G} = \emptyset$.

Dies zeigt, dass $\mathcal{G}$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^f$ ist.

Beispiel einer diskreten Untergruppe von $\mathbb{R}^f$: Es seien $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ k linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^f$, $(k \leq f)$. Dann ist

$$\mathcal{G}^{(k)} := \left\{ \sum_{j=1}^{k} m_j \underline{e}_j \;\middle|\; m_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, k \right\}$$

eine diskrete Untergruppe, $\simeq \mathbb{Z}^k$, von $\mathbb{R}^f$.

Der Beweis von Lemma 4 kann nun mit Hilfe des folgenden Lemmas beendet werden.

<u>Lemma 5.</u> Sei $\mathcal{G}$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^f$. Dann gibt es $k \leq f$ linear unabhängige

Vektoren $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ in $\mathbb{R}^f$ so, dass

$$G = G^{(k)} = \left\{ \sum_{j=1}^{k} m_j \underline{e}_j \,\middle|\, m_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, k \right\}.$$

<u>Beweis.</u>

Wir versehen $\mathbb{R}^f$ mit einer Euklidischen Metrik. Natürlich gehört $\underline{0}$ zu G; wenn $G = \{\underline{0}\}$, sind wir fertig ($k=0$). Falls nicht, gibt es $\underline{e}_0 \in G$, $\underline{e}_0 \neq \underline{0}$. Wir betrachten die Gerade $\{t\underline{e}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Auf dieser Gerade sei $\underline{e}_1$ derjenige Punkt in G, der am nächsten bei $\underline{0}$ ist. Es folgt dann, dass

$$\{t\underline{e}_0 \mid t \in \mathbb{R}\} \cap G = \{m\underline{e}_1 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

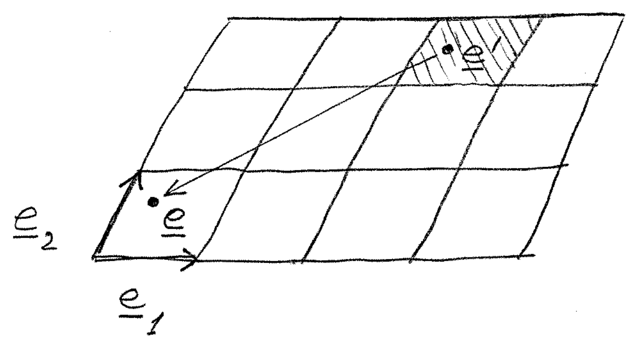
Denn, wenn es einen Punkt $\underline{e} \in G$ gäbe, mit $\underline{e} = t\underline{e}_1$, $m < t < m+1$, dann gehörte auch $\underline{e} - m\underline{e}_1$ zu G, und $\underline{e} - m\underline{e}_1$ wäre näher bei $\underline{0}$ als $\underline{e}_1$, was ein Widerspruch ist. Falls $G = \{m\underline{e}_1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, ist das Lemma bewiesen. Wir nehmen daher an, es gebe einen Punkt $\underline{e} \in G \setminus \{m\underline{e}_1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Sei $\underline{e}_{\parallel}$ die Projektion von $\underline{e}$ auf die Gerade $\{t\underline{e}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Dann ist

$$\underline{e}_{\parallel} = t\underline{e}_1, \quad m \leq t \leq m+1,$$

für ein $m \in \mathbb{Z}$. Sei C der Zylinder mit Achse $\{s\underline{e}_1 \mid m \leq s \leq m+1\}$ und Radius = Distanz von $\underline{e}$ zu $\underline{e}_{\parallel}$. In C gibt es eine endliche Anzahl von Punkten in $\mathcal{G}$. Sei $\underline{e}_2$ derjenige Punkt in $C \cap \mathcal{G}$ der am Nächsten bei der Gerade $\{t\underline{e}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ liegt. Dann zeigt man leicht, dass die Distanz irgendeines Punktes $\underline{e} \in \mathcal{G}$ zur Gerade $\{t\underline{e}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ grösser als diejenige von $\underline{e}_2$ zu $\{t\underline{e}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist; (denn für ein gewisses n gehört $(\underline{e} + n\underline{e}_1)_{\parallel}$ zu $\{t\underline{e}_1 \mid m \leq t \leq m+1\}$, $\Rightarrow \operatorname{dist}(\underline{e}+n\underline{e}_1, (\underline{e}+n\underline{e}_1)_{\parallel}) > \operatorname{dist}(\underline{e}_2, (\underline{e}_2)_{\parallel})$!)

Die ganzzahligen Linearkombinationen von $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ bilden ein Gitter in der Ebene $\mathcal{E}_{12} = \{t\underline{e}_1 + s\underline{e}_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$. Man zeigt nun leicht, dass

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{E}_{12} = \{m_1\underline{e}_1 + m_2\underline{e}_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$



Falls $\underline{e}' \in \mathcal{G}$, dann $\underline{e} \in \mathcal{G}$ und $\operatorname{dist}(\underline{e}, \underline{e}_{\parallel}) < \operatorname{dist}(\underline{e}_2, (\underline{e}_2)_{\parallel}) \longrightarrow$ Widerspruch!

Falls $G = \{m_1 \underline{e}_1 + m_2 \underline{e}_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, ist das Lemma bewiesen. Andernfalls gibt es einen Punkt $\underline{e} \in G$, $\underline{e} \in \mathcal{E}_{12}$. Dann gibt es einen Punkt $\underline{e}_3 \in G$ der am Nächsten bei $\mathcal{E}_{12}$ liegt. Es sei

$$\mathcal{E}_{123} = \{t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2 + t_3 \underline{e}_3 \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Ähnlich wie oben zeigt man, dass

$$G \cap \mathcal{E}_{123} = \{m_1 \underline{e}_1 + m_2 \underline{e}_2 + m_3 \underline{e}_3 \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\};$$

etc.

Die Vektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_k$ sind linear unabhängig $\Rightarrow k \leq f$.

Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Nun beenden wir den Beweis von Lemma 4: Zuerst bemerken wir, dass

$$\mathbb{R}^f / G \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{f-k}.$$

Koordinaten für $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{f-k}$ sind $(\varphi_1, \dots, \varphi_k, y_{k+1}, \dots, y_f)$, mit $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\forall i$, $y_j \in \mathbb{R}$, $\forall j$.

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_k, y_{k+1}, \dots, y_f) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi_i}{2\pi} \underline{e}_i + \sum_{j=k+1}^{f} y_j \underline{f}_j,$$

wo $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{f}_{k+1}, \dots, \underline{f}_f\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^f$ ist, und $G = \{\sum_{i=1}^{k} m_i \underline{e}_i \mid m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, k\}$.

Nun ist $\underline{\psi}_{x_0}$ auf $\mathbb{R}^f/G$ definiert:

$$\underline{\psi}_{x_0} : \underline{t} \in \mathbb{R}^f/G \longmapsto \psi_{\underline{t}}(x_0) \in M^f .$$

Falls $\underline{t}$ und $\underline{s}$ zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{R}^f/G$ sind, dann ist $\psi_{\underline{t}}(x_0) \neq \psi_{\underline{s}}(x_0)$, da $\underline{t} - \underline{s} \notin G$.

Also ist die Abbildung $\underline{\psi}_{x_0} : \mathbb{R}^f/G \to M^f$ eineindeutig und, wegen Behauptung (b), "auf".

Ausserdem ist $\underline{\psi}_{x_0}$ überall differenzierbar, und $\det\left(\frac{\partial \underline{\psi}_{x_0}}{\partial \underline{t}}\right) \neq 0$, (Behauptung (a)!). Also ist $\underline{\psi}_{x_0}$ ein "Diffeomorphismus" von $\mathbb{R}^f/G$ auf M^f.

Daher

$$M^f \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{f-k}. \qquad (3.140)$$

Falls M^f kompakt ist, dann muss $k = f$ und daher $M^f \simeq \mathbb{T}^f$ sein.

Lemma 4 ist nun bewiesen.

Anwendung. $M^f = M_{\underline{\pi}}$, $X_i = X_{P_i}$, $i = 1, \dots, f$,

mit $[X_{P_i}, X_{P_j}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 2.}}}{=} X_{\{P_i, P_j\}} = 0, \ \forall i, j.$

Dank der Tatsache, dass $\underline{\psi}_{x_0}$ ein Diffeomorphismus von $\mathbb{T}^f$ auf $M_{\underline{\pi}}$ ist, sind die Winkel $\varphi_1, \dots, \varphi_f$ "gute" Koordinaten für $M_{\underline{\pi}}$: Wir definieren

$$\underline{n}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \qquad \left(n_j^i = \delta_j^i \right)$$

Die Vektoren $\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_f$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^f$, und

$$\mathbb{R}^f \ni \underline{t} = \sum_{j=1}^{f} t_j \, \underline{n}_j .$$

Sei A die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^f$ auf $\mathbb{R}^f$ mit der Eigenschaft, dass

$$2\pi \, \underline{n}_j = A \, \underline{e}_j = \sum_{i=1}^{f} A_{ij} \, \underline{e}_i ,$$

wo $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_f$ die Erzeugenden von $\mathcal{G}$ sind. Für $\underline{t} \in \mathbb{T}^f = \mathbb{R}^f / \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{1}{2\pi} \sum_j t_j \, A \underline{e}_j \quad (\mathrm{mod}\, \mathcal{G}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j,i} t_j \, A_{ij} \, \underline{e}_i \quad (\mathrm{mod}\, \mathcal{G}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \varphi_i \, \underline{e}_i , \end{aligned}$$

d.h.

$$\varphi_i = \sum_j A_{ij} \, t_j \; (\mathrm{mod}\, 2\pi \mathbb{Z}), \quad \text{oder} \quad \underline{\varphi} = A \underline{t} \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi \mathbb{Z}^f).$$

Sei $x \in M_{\underline{\pi}}$:

$$x = \phi_{\underline{t}}(x_0) \equiv \phi_{x_0}(\underline{t}),$$

wo ϕ_t^j der von X_{P_j} auf $M_{\underline{\pi}}$ erzeugte kanonische Fluss ist, und $\phi_{\underline{t}} := \phi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \phi_{t_f}^f$; (siehe (3.133)).

Also

$$\underline{t}(x) := \phi_{x_0}^{-1}(x)$$

und

$$\underline{\varphi}(x) = A\,\underline{t}(x) = A\,\phi_{x_0}^{-1}(x). \tag{3.141}$$

Das von der Funktion K erzeugte Hamilton'sche Vektorfeld auf $M_{\underline{\pi}}$ ist durch

$$X_K = \sum_j \frac{\partial K}{\partial P_j}(\underline{\pi})\, X_{P_j} \tag{3.142}$$

Es erzeugt den durch

$$\phi_t = \phi_{\underline{t}(t)} = \phi_{t\frac{\partial K}{\partial \underline{P}}(\underline{\pi})},$$

$\underline{t}(t) := t\left(\frac{\partial K}{\partial P_1}(\underline{\pi}), \cdots, \frac{\partial K}{\partial P_f}(\underline{\pi})\right)$, definierten kanonischen Fluss. In den Winkelvariablen $\varphi_1, \cdots, \varphi_f$ wird dieser Fluss wie folgt beschrieben:

$$x = \phi_{\underline{t}_0}(x_0) \Leftrightarrow \underline{t}_0 = \phi_{x_0}^{-1}(x) \Leftrightarrow \underline{\varphi}_0 = A\,\phi_{x_0}^{-1}(x),$$

$$x(t) := \phi_t(x).$$

Dann sind die Winkel von $x(t)$ durch

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}_0 + t A \frac{\partial K}{\partial \underline{P}}(\underline{\pi}),$$

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}_0 + t\,\underline{\omega}(\underline{\pi}),$$

mit

$$\underline{\omega}(\underline{\pi}) = A\,\frac{\partial K}{\partial \underline{P}}(\underline{\pi}), \tag{3.143}$$

gegeben.

Damit sind Punkte (1)–(3) des Satzes von L-J-A-J bewiesen. Es bleibt uns noch der Beweis von Punkt (4). Er führt uns zum Thema der <u>Winkel- und Wirkungsvariablen.</u>

Sei $\underline{\pi} \in \mathbb{R}^f$ wie im Satz von L-J-A-J. Sei $D_{\underline{\pi}}$ eine hinreichend kleine, offene Umgebung von $\underline{\pi}$ in $\mathbb{R}^f$ (z. B. eine kleine "Polyscheibe") mit der Eigenschaft, dass <u>für alle</u> $\underline{\pi}' \in D_{\underline{\pi}}$

(i) $M_{\underline{\pi}'} \neq \emptyset$ und $M_{\underline{\pi}'}$ kompakt und zusammenhängend,

(ii) $X_{P_1}(x), \ldots, X_{P_f}(x)$ sind linear unabhängig,

für alle $x \in M_{\underline{\pi}'}$.

Wir studieren das Hamilton'sche System mit Hamiltonfunktion $K = K(P_1, \ldots, P_f)$ auf der Teilmenge

$$\Gamma_{D_{\underline{\pi}}} := \bigcup_{\underline{\pi}' \in D_{\underline{\pi}}} M_{\underline{\pi}'} \simeq \mathbb{T}^f \times D_{\underline{\pi}}$$

des Phasenraumes Γ. Die Bewegungsgleichungen des Systems, restringiert auf $\Gamma_{D_{\underline{\pi}}}$, lauten in den Variablen $\varphi_1, \dots, \varphi_f$, $P_1, \dots, P_f$ wie folgt:

$$\underline{P}_0 := \underline{P}(x) = \underline{\pi}', \quad \underline{P}(t) := \underline{P}(\phi_t(\underline{x})), \quad x \in M_{\underline{\pi}'},$$

$\underline{\pi}' \in D_{\underline{\pi}}$. Dann gelten die Gleichungen

$$\frac{d P_j(t)}{dt} = \{K, P_j\}(\phi_t(x)) = 0 \ , \quad \text{und}$$

$$\frac{d \varphi_j(t)}{dt} = \omega_j(\underline{\pi}') \ , \quad \underline{\omega}(\underline{\pi}') := A \frac{\partial K}{\partial \underline{P}}(\underline{\pi}').$$

Diese sind trivial zu integrieren:

$$\underline{P}(t) = \underline{P}_0 \ , \quad \underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}_0 + \underline{\omega}(\underline{P}_0)\, t. \qquad (3.144)$$

Jedoch stellen sich die folgenden zwei Probleme:

(I) $(\underline{P}, \underline{\varphi})$ sind i. A. <u>keine</u> symplektischen Koordinaten auf $\Gamma_{D_{\underline{\pi}}}$. Wir wollen daher Variablen $\underline{I} = (I_1, \dots, I_f)$ finden, die Funktionen von $P_1, \dots, P_f$ sind und zu $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_f)$ kanonisch konjugiert sind; ($\underline{\varphi}$: <u>Winkelvariablen</u>, $\underline{I}$: <u>Wirkungsvariablen</u>).

(II) Wir wollen die symplektische Transformation

$$\vartheta : x = (q,p) \in \Gamma_{D_\pi} \longmapsto (\underline{\varphi}, \underline{I}) \qquad (3.145)$$

durch Quadraturen bestimmen.

In den gesuchten Winkel- und Wirkungsvariablen lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen wie folgt:

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\underline{\varphi}}{dt} = \omega(\underline{P}(\underline{I})) \equiv \underline{\omega}(\underline{I}).$$

Die Hamiltonfunktion ist $H(\underline{I}) := K(\underline{P}(\underline{I}))$.

Offenbar gilt

$$\underline{\omega}(\underline{I}) = \frac{\partial H}{\partial \underline{I}}(\underline{I}).$$

Daher muss gelten, dass

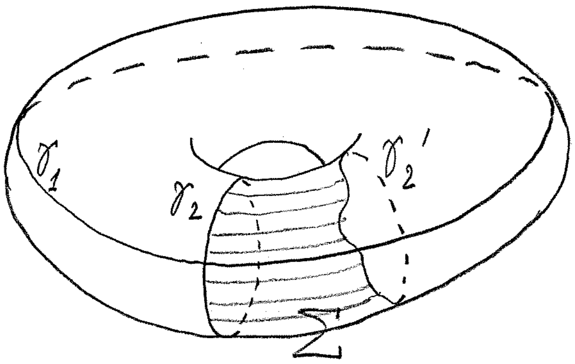
$$\frac{\partial \omega_i(\underline{I})}{\partial I_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial I_j \partial I_i}(\underline{I}) = \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j}(\underline{I}) = \frac{\partial \omega_j(\underline{I})}{\partial I_i}. \qquad (3.146)$$

Die kanonische Transformation $\underline{\psi}$ von (3.145) wollen wir nun über eine erzeugende Funktion, $S(q, \underline{I})$, konstruieren:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \underline{I}), \quad \underline{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \underline{I}}(q, \underline{I}), \qquad (3.146)$$

$$K\left(\frac{\partial S(q,\underline{I})}{\partial q}, q\right) = H(\underline{I}). \qquad (3.147)$$

Sei $\gamma_1, \dots, \gamma_f$ eine Basis von ein-dimensionalen, nicht zusammenziehbaren Schleifen ("Homologie-Zyklen") auf dem Torus $M_{\underline{\pi}'}$ $(\underline{\pi}' \in D_{\underline{\pi}})$: Entlang γ_j wächst die Winkelvariable φ_i von 0 auf 2π, für $i = j$, und bleibt konstant für $i \neq j$.



Für $(q,p) \in M_{\underline{\pi}'}$ ist $\underline{P}(q,p) = \underline{\pi}'$, und wir setzen

$$I_j(\underline{P} = \underline{\pi}') := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha \qquad (3.148)$$

Sei γ_j' eine zu γ_j homologe, nicht zusammenziehbare Schleife auf $M_{\underline{\pi}'}$. Dann gibt es eine orientierbare, zwei-dimensionale Fläche $\Sigma \subset M_{\underline{\pi}'}$, deren Rand, $\partial\Sigma$, aus γ_j und γ_j' besteht, d.h.

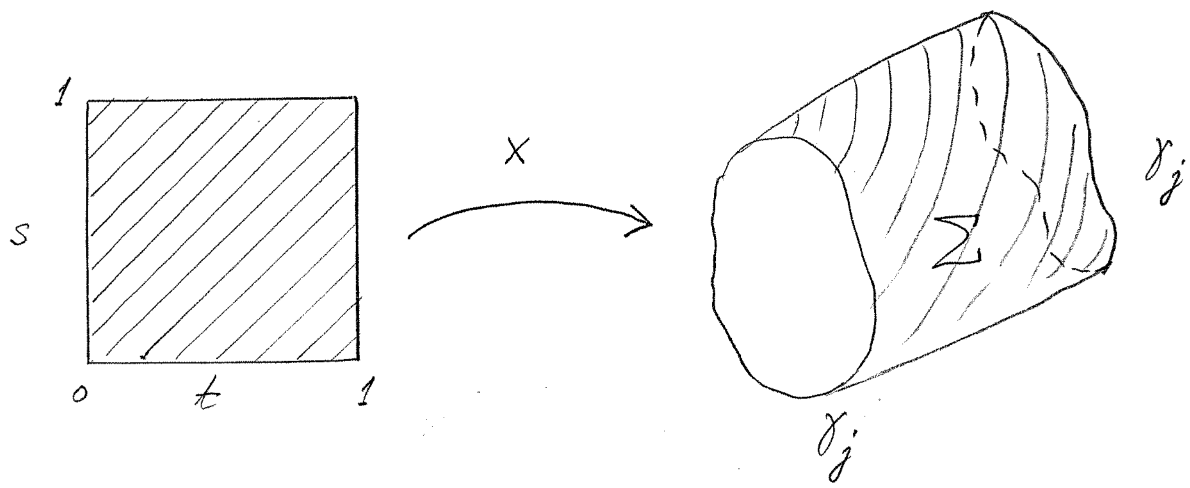
$$\partial\Sigma = \gamma_j \cup \bar{\gamma}_j' ,$$

wo $\bar{\gamma}_j'$ die Schleife γ_j' mit umgekehrter Orientierung ist. Nach dem Satz von Stokes gilt, dass

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_j}\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha\, dq^\alpha - \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_j'}\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha\, dq^\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\sum_{\alpha=1}^{f} dp_\alpha \wedge dq^\alpha$$

Es ist denkbar, dass Sie diese Formel nicht gut verstehen. Daher will ich sie kurz erklären.



$$\Sigma = \{ X(t,s) \mid 0 \le t \le 1,\ 0 \le s \le 1 \},$$

$$\gamma_j = \{ X(t,1) \mid 0 \le t \le 1 \},$$

$$\gamma_j' = \{ X(t,0) \mid 0 \le t \le 1 \},$$

mit $x(t,s) := (q(t,s), p(t,s))$; $x(0,s) = x(1,s), \forall s$ (Periodizität in t!). Dann sind

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 x(t,1)^T J \, \frac{\partial x(t,1)}{\partial t} \, dt,$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j'} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 x(t,0)^T J \, \frac{\partial x(t,0)}{\partial t} \, dt.$$

Denn

$$\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha - dp_\alpha \, q^\alpha \right) + \frac{1}{4\pi} \, d\left(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha q^\alpha \right), \text{ und}$$

$$\oint_{\gamma} d\left(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha q^\alpha \right) = \int_0^1 dt \, \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha(t,s) \, q^\alpha(t,s) \right) = 0,$$

für $\gamma = \gamma_j$, $s = 1$ und $\gamma = \gamma_j'$, $s = 0$, (Periodizität in t!)

Es folgt, dass

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha - \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j'} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^1 x(t,s)^T J \, \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} \, dt \right]_{s=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \left\{ \frac{\partial x(t,s)^T}{\partial s} J \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + x(t,s)^T J \frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s\, \partial t} \right\} \qquad (3.149)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x(t,s)^T}{\partial s} J\, x(t,s) \right)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \left(x(t,s)^T J \frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s\, \partial t} - \frac{\partial^2 x(t,s)^T}{\partial t\, \partial s} J\, x(t,s) \right) \qquad (3.150)$$

Der erste Term auf der R. S. <u>verschwindet</u> (Periodizität in t); der zweite Term ist gleich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \; x(t,s)^T J \frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s\, \partial t},$$

da $\dfrac{\partial^2 x(t,s)^T}{\partial t\, \partial s} = \dfrac{\partial^2 x(t,s)^T}{\partial s\, \partial t}$ und $J^T = -J$.

Damit folgt, dass

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \; \frac{\partial x(t,s)^T}{\partial s} J \frac{\partial x(t,s)}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \; x(t,s)^T J \frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s\, \partial t}. \qquad (3.151)$$

Setzen wir (3.151) in (3.149) ein, so folgt, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_j}\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha\, dq^\alpha - \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_j'}\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha\, dq^\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 ds \int_0^1 dt \;\; \frac{\partial x(t,s)}{\partial s}^T J \,\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}$$

$$=: \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\sum_{\alpha=1}^{f} dp_\alpha \wedge dq^\alpha . \qquad (3.152)$$

Nun sind $\dfrac{\partial x(t,s)}{\partial t}$ und $\dfrac{\partial x(t,s)}{\partial s}$ Tangential-vektoren zu $M_{\underline{\pi}'}$ im Punkte $x(t,s) \in \Sigma \subset M_{\underline{\pi}'}$.

Eine Basis von Tangentialvektoren im Punkte $x(t,s)$ besteht aus den Vektoren

$$X_{P_i}(x(t,s)) = J\,\frac{\partial P_i}{\partial x}(x(t,s)), \quad i = 1,\dots,f.$$

Also existieren Zahlen $\alpha_i(t,s), \beta_i(t,s), i=1,\dots,f$, so, dass

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{f} \alpha_i(t,s)\, J\, \frac{\partial P_i}{\partial x}(x(t,s))$$

und

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} = \sum_{i=1}^{f} \beta_i(t,s)\, J\, \frac{\partial P_i}{\partial x}(x(t,s)).$$

Daher folgt, dass

$$\frac{\partial x(t,s)^T}{\partial s} J \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{f} \Big\{ \alpha_i(t,s)\, \beta_j(t,s) \frac{\partial P_j}{\partial x}(x(t,s))^T$$

$$\times \underbrace{J^T J J}_{=J} \frac{\partial P_i}{\partial x}(x(t,s)) \Big\}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{f} \alpha_i(t,s) \beta_j(t,s) \{P_j, P_i\}(x(t,s))$$

$$= 0 \; !$$

da $\{P_j, P_i\} \equiv 0$. Das ist die präzise Meinung der Aussage, dass die Zweiform $\sum_{\alpha=1}^{f} dp_\alpha \wedge dq^\alpha$ auf $M_{\underline{\pi}'}$ <u>verschwindet</u>, (und daher die R. S. von (3.152) verschwindet, da ja $\Sigma \subset M_{\underline{\pi}'}$).

Wir haben bewiesen, dass

$$I_j(\underline{P} = \underline{\pi}') = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha \qquad (3.153)$$

<u>unabhängig</u> von der Wahl von γ_j in einer festen Homologieklasse von Schleifen ist!

Man nennt die durch (3.153) definierten Funktionen $I_j = I_j(\underline{P})$, $j = 1, \dots, f$, <u>Wirkungsvariablen</u>.

Wir nehmen nun an, es gebe eine offene Umgebung $D'_{\underline{\pi}} \subseteq D_{\underline{\pi}}$ von $\underline{\pi}$ so, dass man die Tori $M_{\underline{\pi}'}$, $\underline{\pi}' \in D_{\underline{\pi}}$ durch die Werte der Wirkungsvariablen parametrisieren kann, d.h. für $\underline{\pi}' \in D'_{\underline{\pi}}$ ist

$$M_{\underline{\pi}'} = \{ x \in \Gamma \mid I_j(x) = \imath_j,\ j = 1, \dots, f \}, \qquad (3.154)$$

wo $\imath_j = \imath_j(\underline{P} = \underline{\pi}')$ von $\underline{\pi}'$ abhängige, relle Zahlen sind, für $j = 1, \dots, f$. Diese Annahme folgt aus

$$\det \left(\frac{\partial I_\ell}{\partial P_k} (\underline{P} = \underline{\pi}') \right) \neq 0, \qquad (3.155)$$

für alle $\underline{\pi}' \in D_{\underline{\pi}}$, und (3.155) folgt aus der Definition der Wirkungsvariablen, dem Umstand, dass J eine reguläre Matrix ist, und natürlichen Voraussetzungen über die f Funktionen $P_1, \dots, P_f$. (Wir wollen hier nicht auf Einzelheiten eingehen.)

Da die Wirkungsvariablen $I_1, \dots, I_f$ nur von der Wahl des Torus $(M_{\underline{\pi}'}, \underline{\pi}' \in D'_{\underline{\pi}})$, nicht aber vom betrachteten Punkt auf dem Torus, abhängen, sind sie Funktionen von $P_1, \dots, P_f$. Daraus folgt, dass

$$\{I_i, I_j\} = \sum_{k,l} \frac{\partial I_i}{\partial P_k} \{P_k, P_l\} \frac{\partial I_j}{\partial P_l} = 0, \qquad (3.156)$$

da $\{P_k, P_l\} = 0$, $\forall k,l$, d.h. die Wirkungsvariablen sind untereinander in <u>Involution</u>.

$\Gamma_0 \subseteq \{x \in \Gamma \mid P(x) \in D_n\}$

Wir betrachten nun eine offene Teilmenge die wir durch kanonische Koordinaten $\{q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f\}$ parametrisieren können so, dass

$$\det\left(\frac{\partial I_i}{\partial p_j}\right) \neq 0, \qquad (3.157)$$

$\forall (q,p) \in \Gamma_0$. Dann kann man die Gleichungen

$$I_j(q,p) = \imath_j, \quad j = 1, \dots, f,$$

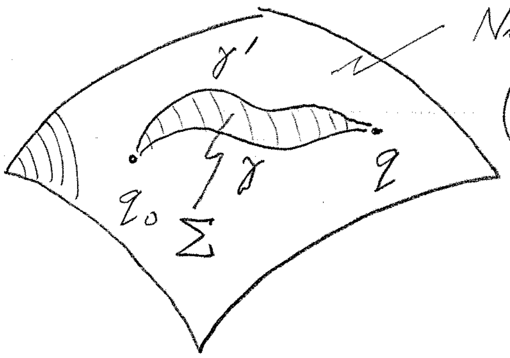
auf Γ_0 nach $p_1, \dots, p_f$ auflösen, (falls Γ_0 klein genug gewählt wurde):

$$p_j = F_j(q^1, \dots, q^f, \imath_1, \dots, \imath_f), \qquad (3.158)$$

($\imath_j$ = Wert von I_j) $j = 1, \dots, f$, und es gilt, dass

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial I_j}\right) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial I_j}\right) = \left(\frac{\partial I_i}{\partial p_j}\right)^{-1},$$

also
$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial I_j}\right) \neq 0 \qquad (3.159)$$
auf Γ_0. Nun definieren wir eine <u>erzeugende Funktion</u> für eine kanonische Transformation:



Wir definieren die erzeugende Funktion $S(q, \underline{I})$ durch
$$S(q,\underline{I}) \equiv S_\gamma(q,\underline{I}) = \int\limits_{\gamma: q_0 \to q} \sum_{j=1}^{f} F_j(\tilde{q}, \underline{I})\, d\tilde{q}^j, \qquad (3.160)$$
wo γ ein Pfad von $q_0 \in M_{\underline{\pi}'} \cap \Gamma_0$ nach $q \in M_{\underline{\pi}'} \cap \Gamma_0$ ist, der in $M_{\underline{\pi}'}$ enthalten ist; d.h. auf der R.S. von (3.160) haben die Wirkungsvariablen I_j die festen Werte $i_j = i_j(\underline{\pi}')$, $\forall j = 1, \dots, f$.

Wir zeigen nun, dass $S_\gamma(q,\underline{I}) = S_{\gamma'}(q,\underline{I})$, falls γ und γ' in $M_{\underline{\pi}'} \cap \Gamma_0$ zueinander <u>homotop</u> sind, (d.h. "γ kann stetig in γ' übergeführt werden").

Falls

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^j}(q, \underline{I}) = \frac{\partial F_j}{\partial q^i}(q, \underline{I}), \tag{3.161}$$

dann gibt es lokal (in einer offenen Umgebung von Σ) eine Funktion G so, dass

$$F_i(q, \underline{I}) = \frac{\partial G}{\partial q^i}(q, \underline{I}).$$

(Poincaré's Lemma), und es folgt, dass

$$S_\gamma(q, \underline{I}) = S_{\gamma'}(q, \underline{I}) = G(q, \underline{I}) - G(q_0, \underline{I}).$$

Nun verifizieren wir (3.161). Wir gehen von den Gleichungen

$$I_j = I_j(q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f)$$
$$\equiv I_j(q^1, \dots, q^f, F_1(q, \underline{I}), \dots, F_f(q, \underline{I}))$$

aus. Daraus folgt, dass

$$\frac{dI_j}{dq^i} := \frac{\partial I_j}{\partial q^i} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial I_j}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial q^i} = 0.$$

In Matrixnotation,

$$\frac{\partial I}{\partial q} + \frac{\partial I}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial I}{\partial q} = -\frac{\partial I}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial q}. \tag{3.162}$$

Da $\{I_i, I_j\} = 0$, $\forall\, i,j$, wissen wir ausserdem, dass

$$\frac{\partial I}{\partial p}\left(\frac{\partial I}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial I}{\partial q}\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)^T = 0 \qquad (3.163)$$

Aus (3.162) und (3.163) folgt, dass

$$\frac{\partial I}{\partial p}\left(-\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^T + \frac{\partial F}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)^T = 0$$

$$\overset{(3.157)}{\Longleftrightarrow} \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^T + \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

was den Gln. (3.161) in Matrixnotation entspricht.

<u>Bemerkung.</u> Die (lokale) Unabhängigkeit von $S_\gamma(q, \underline{I})$ (wie in (3.160)) vom Pfad γ kann direkt mit den zwischen (3.149) und (3.153) benützten Argumenten bewiesen werden, (Übung!).

Wir behaupten nun, $S(q, \underline{I})$ sei die erzeugende Funktion für eine <u>kanonische</u> (symplektische) <u>Transformation</u>

$$\vartheta : (q^1, \ldots, q^f, p_1, \ldots, p_f) \longmapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_f, I_1, \ldots, I_f), \qquad (3.164)$$

die auf Γ_0 definiert ist.

Dies beweist man wie folgt:

Aus (3.160) und der Unabhängigkeit von S vom Pfad γ folgt, dass

$$\frac{\partial S}{\partial q^j}(q,\underline{I}) = F_j(q,\underline{I}) = p_j\,,\ j=1,\dots,f. \quad (3.165)$$

Wir setzen

$$\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial I_j}(q,\underline{I}),\ j=1,\dots,f. \quad (3.166)$$

Wegen (3.159) kann man die Gleichungen (3.165) lokal (auf Γ_0) nach $\underline{I} = \underline{I}(q,p)$ auflösen. Das Resultat setzt man in (3.166) ein. Da $q^1,\dots,q^f$ untereinander und $I_1,\dots,I_f$ untereinander in Involution sind, sagt uns die allgemeine Theorie, dass die durch (3.165) und (3.166) bestimmte Transformation ϑ kanonisch ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die Variablen $\alpha_1,\dots,\alpha_f$ die schon früher konstruierten Winkelvariablen sind: $\alpha_j = \varphi_j$, $j=1,\dots,f$. Sei $K = K(P_1,\dots,P_f)$ die Hamiltonfunktion eines mechanischen Systems. Da $P_i = P_i(\underline{I})$, $i=1,\dots,f$, ist $K = H(I_1,\dots,I_f) :=$ $= K(P_1(\underline{I}),\dots,P_f(\underline{I}))$ (unabhängig von $\alpha_1,\dots,\alpha_f$).

Die Bewegungsgleichungen der Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_f$, $I_1, \dots, I_f$ lauten daher

$$\dot{I}_j = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} = 0\,, \quad \dot{\alpha}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}\,, \quad j = 1, \dots, f.$$

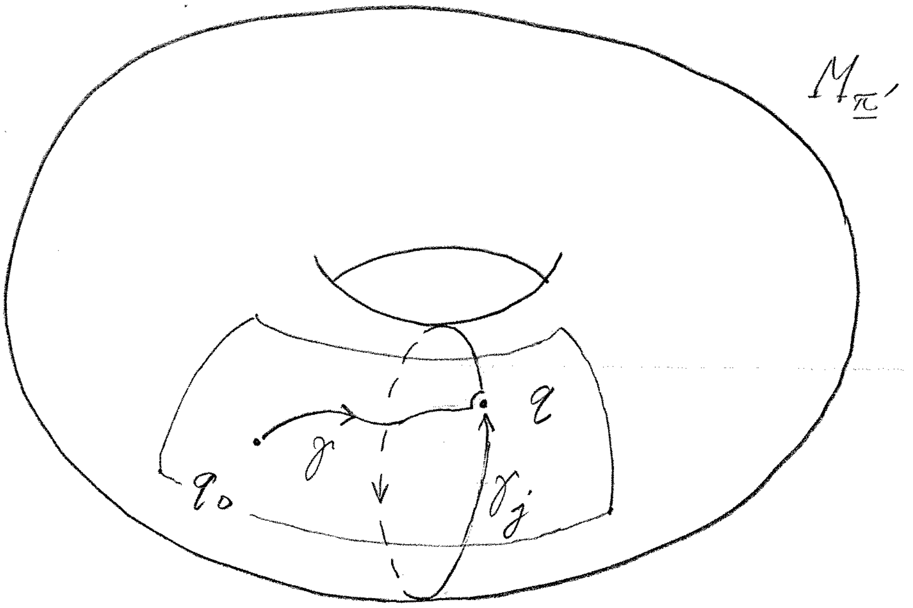
Die Lösung ist: $I_j(t) = \iota_j$ = const.,

$$\alpha_j(t) = \omega_j(\underline{\iota})\,t, \quad \omega_j(\underline{\iota}) = \frac{\partial H}{\partial I_j}(\underline{I} = \underline{\iota}), \; j = 1, \dots, f.$$

Wie die Winkelvariablen $\varphi_1, \dots, \varphi_f$, wachsen also die Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ linear in t unter dem von einem Hamilton'schen Vektorfeld X_K erzeugten Fluss, für irgend eine Funktion K, die nur von $I_1, \dots, I_f$ abhängt; (z.B. $K = I_i$, $i = 1, \dots, f$). Um α_j mit φ_j identifizieren zu können, genügt es zu zeigen, dass α_j entlang dem Wege $\gamma_j \subset M_{\underline{\pi}}$, um 2π anwächst, genauso wie φ_j, wogegen α_j beim Durchlaufen von γ_i, $i \neq j$, an seinen Ausgangswert zurückkehrt, genauso wie φ_j.

Diese Eigenschaften der Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ zeigt man folgendermassen: Die Funktion $S(q, \underline{I})$ ist eine <u>mehrwertige</u> Funktion von q auf jedem Torus

$$M_{\underline{\pi}'} = \{ x \in \Gamma \mid I_j(x) = \iota_j(\underline{\pi}'),\ j = 1, \dots, f \},\quad \underline{\pi}' \in D'_{\underline{\pi}}.$$



Es sei $\gamma' = \gamma_j \circ \gamma$, ($\gamma_j$ wie nach Gl. (3.147), für $j = 1, \dots, f$). Dann ist

$$S_{\gamma_j \circ \gamma}(q, \underline{I}) = \int_{\gamma_j \circ \gamma} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha = S(q, \underline{I}) + \Delta_i S(q, \underline{I} \qquad (3.16$$

wo
$$S(q, \underline{I}) = \int_{\gamma} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha = \int_{q_0}^{q} \sum_{j=1}^{f} F_j(\tilde{q}, \underline{I}) \, d\tilde{q}^j$$

$$\Delta_j S(q, \underline{I}) = \oint_{\gamma_j} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq^\alpha \overset{(3.148)}{=} 2\pi I_j . \qquad (3.168)$$

Da $S(q, \underline{I})$ mehrwertig ist, ist anzunehmen, dass auch die Variablen $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ <u>mehrwertig</u> sind: Bewegt man q um γ_j, so nimmt $S(q, \underline{I})$ um die

Grösse $\Delta_j S(q, \underline{I}) = 2\pi I_j$ zu. Es folgt, dass unter dieser Bewegung die Variable $\alpha_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}(q, \underline{I})$ um die Grösse $\frac{\partial \Delta_j S}{\partial I_i}(q, \underline{I}) = 2\pi \delta_{ij}$ zunimmt. Dies ist ihr aber mit der Winkelvariable φ_i gemein. Es folgt nun, dass

$$\alpha_i = \varphi_i, \quad \forall i = 1, \dots, f. \tag{3.169}$$

Aus unserer Darstellung folgt, dass die Transformation $\vartheta : (q, p) \longmapsto (\underline{\varphi}, \underline{I})$ allein durch Inversion von Abbildungen und Linienintegration, d.h. durch <u>Quadraturen</u>, bestimmt werden kann.

Damit ist schliesslich auch Punkt (4) des Satzes von Liouville, Jacobi, Arnol'd und Jost bewiesen.

Der eben bewiesene Satz bildet die Grundlage für Anwendungen wie <u>adiabatische Invarianten</u> ($\to$ statistische Mechanik) und <u>Hamilton'sche Störungstheorie</u> ($\to$KAM Theorem): Siehe Arnol'd, Straumann, etc