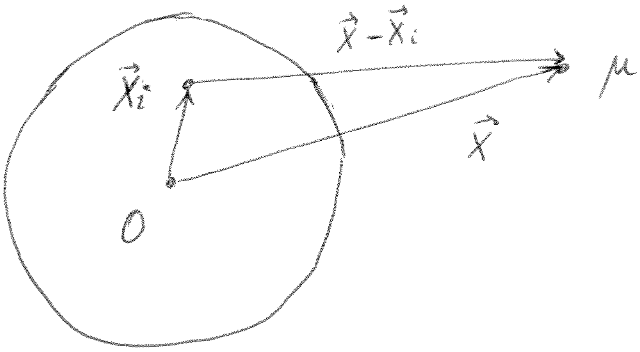
Üb 1.1

Man hat für die Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten: $\vec{K}_i(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} \quad \frac{G\mu\, \rho(\vec{x}_i)\, d^3\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^2}$

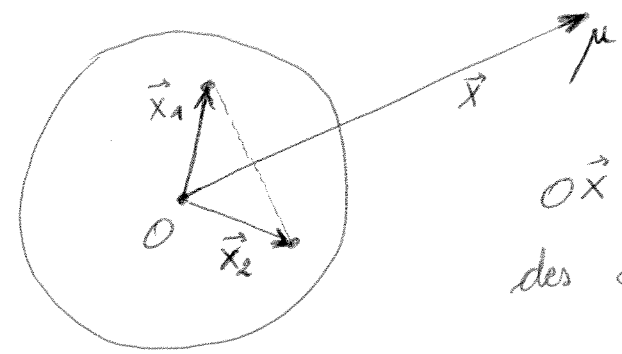


$$\rho(\vec{x}_i)\, d^3\vec{x}_i = m_i(\vec{x}_i)$$

(i) Superpositionsprinzip: $\vec{K}(\vec{x}) = \sum_i \vec{K}_i(\vec{x})$

(ii)

$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}$
$= \vec{x}_2 \cdot \vec{x}$



$O\vec{x}$ ist eine Symmetrie-Achse des Systems $\Rightarrow (\vec{K}_1 + \vec{K}_2) \propto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

und $\frac{\vec{K}(\vec{x})}{|\vec{K}|} = -\frac{\vec{x}}{r} \qquad (r = |\vec{x}|)$.

Man muss noch zeigen, dass $\vec{K}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{r}\, k(r)$, mit $k(r) = \frac{G\mu M}{r^2}$.

Dazu, berechnen wir den "Fluss"

$$\int_{S_r : |\vec{x}|=r} (-\vec{K}(\vec{x})) \cdot d\vec{o}(\vec{x}) = +\int_{S_r} \underbrace{|\vec{K}|(r)}_{k(r)} \cdot |d\vec{o}| \cdot 1$$

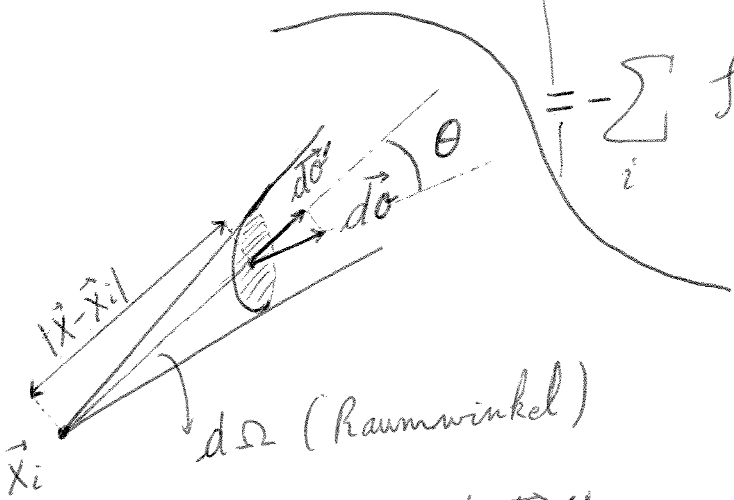
$$= k(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (*)$$

und

$$\int_{S_r} (-\vec{K})\, d\vec{o} = -\sum_i \int_{S_r} \vec{K}_i(\vec{x}) \cdot d\vec{o}(\vec{x})$$

$$= -\sum_i \int_{S_r} \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} \frac{G\mu\, \rho(\vec{x}_i)\, d^3\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^2}\, d\vec{o}$$

$$= -\sum_i \rho(\vec{x}_i)\, d^3\vec{x}_i \; G\mu \underbrace{\int_{S_r} \frac{d\vec{o} \cos\theta}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^2}}_{\int d\Omega = 4\pi}$$



$$|d\vec{o}| \cdot \cos\theta = |d\vec{o}'| = d\Omega \cdot |\vec{x}-\vec{x}_i|^2$$

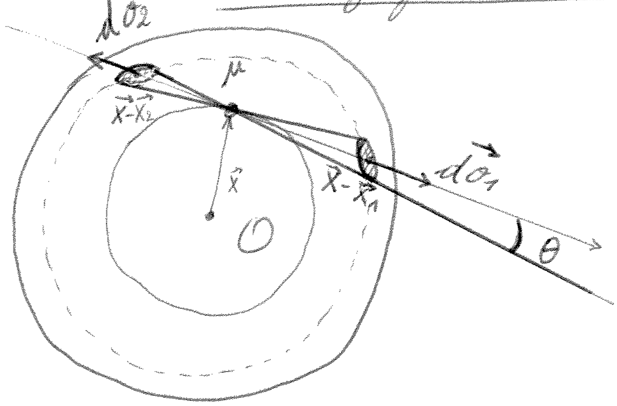
$$= -G\mu\, 4\pi \sum_{i : |\vec{x}_i| \le r} \rho(\vec{x}_i)\, d^3\vec{x}_i = -M(r)\, G\mu\, 4\pi$$

$(*)(*)$

Mit $(*)$ und $(*)(*)$

$$\Rightarrow k(r) = \frac{G\mu\, M(r)}{r^2}$$

Beitrag für $|\vec{X}'| > r$:



$$|\vec{dO}_1| \cos\theta = |d\vec{O}_1'| = d\Omega\, |\vec{X}-\vec{X}_1|^2$$

$$|\vec{dO}_2| \cos\theta = |d\vec{O}_2'| = d\Omega\, |\vec{X}-\vec{X}_2|^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{K}_1 \cdot \vec{dO}_1 + \vec{K}_2 \cdot \vec{dO}_2 = |\vec{K}_1| \cdot |\vec{dO}_1| \cos\theta - |\vec{K}_2|\, |\vec{dO}_2| \cos\theta$$

$$\propto d\Omega \left(\frac{|\vec{X}-\vec{X}_1|^2}{|\vec{X}-\vec{X}_1|^2} - \frac{|\vec{X}-\vec{X}_2|^2}{|\vec{X}-\vec{X}_2|^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{N_{|\vec{x}'| > r = |\vec{X}|}} \vec{K}(\vec{x}') \cdot \vec{dO}(\vec{x}') = 0$$

Beitrag nur für $\vec{x}' \leq r = |\vec{X}| \equiv$ Stellungsvektor von μ.

Q.E.D.

Üb 1.4

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, N$$

$$q_i = \varphi_i(Q_1, \dots, Q_N)$$

$$\tilde L(\dot Q(t), Q(t), t) := L(\dot\varphi(Q), \varphi(Q), t)$$

a) $$\dot\varphi_i(Q) = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\dot Q_j$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \dot\varphi_i}{\partial \dot Q_j} \equiv \frac{\partial \dot q_i}{\partial \dot Q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

b) Man muss zeigen, dass $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot Q_i} - \frac{\partial \tilde L}{\partial Q_i} = 0$.

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde L}{\partial Q_i} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_j(Q)}\frac{\partial \varphi_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_j(Q)}\frac{\partial \dot\varphi_j}{\partial Q_i}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial Q_i}} \quad (*)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde L}{\partial \dot Q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_j}\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \dot Q_i}}_{\equiv 0} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot Q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

$q_j(Q_1, \dots, Q_N)$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}} \quad (*)(*)$$

(*) & (*)(*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = 0 \;!$$

Q.E.D.

quod erat demonstrandum

Üb 1.5

Man hat nur Zwangskräfte: $\vec{Z}$.
Die Newton'sche Gleichung lautet dann:

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{Z}(\vec{x}), \qquad (1)$$

und die Zwangsbedingung lautet:

$$\vec{Z}(\vec{x}) \cdot \delta \vec{x} = 0 \iff F(\vec{x}) = 0. \qquad (2)$$

Ein Massenpunkt in $\mathbb{R}^3$ hat 3 Freiheitsgraden.
Mit der Nebenbedingung (2), hat der System nur noch 2 Freiheitsgra
Dann sind die Koordinaten x, y, z nur von 2 unabhängigen Parametern abhängig:

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v),$$

wo u und v die Gauss'sche Koordinaten der Fläche $F(\vec{x}) = 0$ sind.

Dann gilt

$$\delta \vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \delta v \qquad (3)$$

und

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^2} \dot{u}^2 + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial v^2} \dot{v}^2 + 2 \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u \partial v} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \ddot{u} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \ddot{v}. \qquad (4)$$

Aus (1) und (2) kriegt man $\ddot{\vec{x}} \cdot \delta \vec{x} = 0$.
Man setzt (3) und (4) ein und beachtet, dass $\delta u, \delta v$ voneinander unabhängig sind. Daher folgt: $\ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = 0$ (5)

Wir setzten $u = u^1$, $v = u^2$, d.h. wir nennen unsere Koordinaten u^a mit $a = 1, 2$, und wir verwenden die Definitionen der metrischen Tensor, g_{ab}, und der Christoffel'schen Symbolen, $\Gamma_{ab,c}$. Dann lautet die Gleichung (5) wie folgt:

$$\sum_{a,b} \Gamma_{ab} \dot{u}^a \dot{u}^b + \sum_b g_{cb} \ddot{u}^b = 0 .$$