Irreduzible Darstellungen der Permutationsgruppe S_N.

Betrachten die Gruppenalgebra, $\mathcal{R}$, von S_N

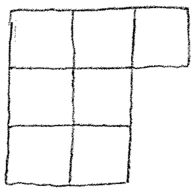
$$\mathcal{R} := \sum_{\pi \in S_N} K\pi \equiv \left\{ \sum_{\pi \in S_N} \lambda_\pi \pi : \lambda_\pi \in K \right\}, \text{ wo}$$

$K = \mathbb{R}$, oder $= \mathbb{Q}$, oder $= \mathbb{C}$.

$\mathcal{R}$ enthält Linksideale. Jedes Linksideal von $\mathcal{R}$ ist eine direkte Summe minimaler Linksideale. Die minimalen Linksideale tragen irreduzible Darstellungen von S_N, (definiert durch Linksmultiplikation mit $\pi \in S_N$). Jedes Linksideal wird von einem Projektor (Idempotenten) in $\mathcal{R}$ erzeugt. Minimale Projektoren entsprechen irreduziblen Darstellungen und werden, im Falle von S_N, durch Young'sche Diagramme charakterisiert:

Wir schreiben die Ziffern $1, \dots, N$ in h Zeilen von Kästchen so, dass in der νten Zeile α_ν Kästchen Platz finden, mit

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_h \text{ , und} \\ \sum_{\nu=1}^{h} \alpha_\nu = N. \end{array}\right\} \qquad (8.21)$$

Bsp.  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, 2, 2)$, $N = 7$.

Wir bezeichnen ein solches Diagramm von Kästchen mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h)$, das mit Ziffern von 1 bis N gefüllte Young'sche Diagramm mit Σ_α; dabei soll α (8.21) genügen.

Auf den Diagrammen α definieren wir eine Ordnung

$$\alpha > \beta \text{ , falls } \alpha_\nu - \beta_\nu > 0,$$

für das kleinste ν für welches die Differenz nicht verschwindet. z. B. für $N = 5$:

$$(5) > (4,1) > (3,2) > (3,1,1) > (2,2,1) > (2,1,1,1) > (1,1,1,1,1).$$

Für ein vorgegebenes Young'sches Diagramm Σ_α bezeichne $P(\Sigma_\alpha)$ die Untergruppe aller Permutationen, die nur die Ziffern innerhalb der

Zeilen vertauschen, die Zeilen insgesamt aber <u>invariant</u> lassen. Ebenso bezeichne $Q(\Sigma_\alpha)$ die UG derjenigen Permutationen, die nur die Ziffern innerhalb der Kolonnen vertauschen.

Für $\pi \in S_N$, bezeichne $\pi \sum_\alpha$ das Young Diagramm, das man aus $\sum_\alpha$ durch Anwendung von π erhält. Für $q \in Q(\Sigma_\alpha)$ lässt $\pi q \pi^{-1}$ die Kolonnen von $\pi \sum_\alpha$ invariant, d.h.

$$Q(\pi \textstyle\sum_\alpha) = \pi \, Q(\Sigma_\alpha) \, \pi^{-1} \qquad (8.22)$$

Die Gruppenalgebra R enthält die Elemente

$$\left.\begin{aligned} S(\Sigma_\alpha) &= \sum_{p \in P(\Sigma_\alpha)} p \\ A(\Sigma_\alpha) &= \sum_{q \in Q(\Sigma_\alpha)} \operatorname{sign}(q) \cdot q \end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

Man verifiziert sofort, dass

$$\left.\begin{array}{l} p\, S(\Sigma_\alpha) = S(\Sigma_\alpha)\, p = S(\Sigma_\alpha), \quad \forall\, p \in P(\Sigma_\alpha) \\ q\, A(\Sigma_\alpha)\, \mathrm{sign}(q) = A(\Sigma_\alpha)\, q\, \mathrm{sign}(q) = A(\Sigma_\alpha), \\ \forall\, q \in Q(\Sigma_\alpha). \end{array}\right\} \quad (8.24)$$

$$\Rightarrow \quad S(\Sigma_\alpha)^2 = f_\alpha\, S(\Sigma_\alpha), \text{ und } A(\Sigma_\alpha)^2 = f'_\alpha\, A(\Sigma_\alpha),$$

für Konstanten $f_\alpha, f'_\alpha \in \mathbb{Z}$.

<u>Lemma 1.</u> Seien $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$ zwei Young Diagramme, mit $\alpha \geq \beta$. Falls es in Σ_α in <u>keiner</u> Zeile zwei Ziffern gibt, die in Σ_β in der <u>gleichen</u> Kolonne vorkommen, dann gilt, dass

$$\alpha = \beta,$$

und Σ_α wird durch eine Permutation $p \cdot q$, $p \in P(\Sigma_\alpha), q \in Q(\Sigma_\alpha)$, in Σ_β übergeführt, d.h.

$$\Sigma_\beta = p \cdot q\, \Sigma_\alpha . \qquad (8.25)$$

<u>Beweis.</u> $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha_1 \geq \beta_1 . \qquad (8.26)$

Falls die α_1 Ziffern in der ersten Zeile von Σ_α

in verschiedenen Kolonnen von Σ_β vorkommen, dann hat Σ_β mindestens α_1 Kolonnen.

$\Rightarrow \quad \alpha_1 \leq \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1$, wegen (8,26)!

Die Ziffern der ersten Zeile von Σ_α können alle in die erste Zeile von Σ_β gebracht werden, indem man eine Permutation $q_1' \in Q(\Sigma_\beta$. anwendet.

Weiter impliziert nun $\alpha \geq \beta$, dass $\alpha_2 \geq \beta_2$.

In der 2. Zeile von Σ_α sind α_2 Ziffern.

Falls diese in verschiedenen Kolonnen von $q_1' \Sigma_\beta$ sitzen, dann muss $q_1' \Sigma_\beta \setminus \{1. \text{Zeile}\}$ immer noch mind. α_2 Kolonnen haben.

Also $\alpha_2 \leq \beta_2$, und daher $\alpha_2 = \beta_2$.

Diese Ziffern kann man in die 2. Zeile von Σ_β bringen durch eine Permutation q_2', die die Kolonnen von $q_1' \Sigma_\beta$ und dessen 1. Zeile invariant lässt.

Nun fährt man so weiter und erhält schliesslich ein Diagramm $q'\Sigma_\beta = q_h' q_{h-1}' \cdots q_1' \Sigma_\beta$ dessen Zeilen mit denjenigen von Σ_α übereinstimmen. Daher existiert ein $p \in P_\alpha$ so, dass

$$p\,\Sigma_\alpha = q'\,\Sigma_\beta .$$

Nun lässt q' die Kolonnen von Σ_β invariant: q' lässt also auch die Kolonnen von $q'\Sigma_\beta = p\Sigma_\alpha$ invariant. Daher ex. q so, dass

$$q' = p\,q^{-1}p^{-1}, \qquad q \in Q(\Sigma_\alpha)$$

Also
$$p\,q^{-1}p\,\Sigma_\beta = p\,\Sigma_\alpha ,$$

oder
$$\Sigma_\beta = pq\,\Sigma_\alpha , \quad p \in P(\Sigma_\alpha),\ q \in Q(\Sigma_\alpha).$$

Q.E.D.

Korollar 2.

$$A(\Sigma_\beta)\,S(\Sigma_\alpha) = 0, \quad \text{falls } \alpha > \beta. \qquad (8.27)$$

Beweis. Falls $\alpha > \beta$, dann gibt es nach dem

Lemma zwei Ziffern, die in einer einzigen Zeile von Σ_α auftreten und die in der <u>gleichen</u> Kolonne von Σ_β sind. Sei t die Transposition die diese zwei Ziffern vertauscht. Nach (8.24) gilt dann

$$\begin{aligned} A(\Sigma_\beta) S(\Sigma_\alpha) &= A(\Sigma_\beta)\, t\, t^{-1} S(\Sigma_\alpha) \\ &= \operatorname{sign}(t)\, A(\Sigma_\beta)\, S(\Sigma_\alpha) \\ &= -A(\Sigma_\beta) S(\Sigma_\alpha) \Rightarrow A(\Sigma_\beta) S(\Sigma_\alpha) = 0\,! \end{aligned}$$

Q.E.D.

Genauso zeigt man, dass

$$S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\beta) = 0, \text{ falls } \alpha > \beta. \tag{8.28}$$

Weiter folgt, dass für $\alpha > \beta$

$$S(\Sigma_\alpha)\, \pi\, A(\Sigma_\beta)\, \pi^{-1} = 0, \quad \forall \pi \in S_N, \tag{8.29}$$

da $\pi A(\Sigma_\beta) \pi^{-1} = A(\pi \Sigma_\beta)$ zu $\pi \Sigma_\beta$ gehört.

Nun multipliziere man (8.29) mit π und summiere die erhaltenen Gleichungen, multipliziert mit beliebigen reellen Zahlen, über $\pi \in S_N$. Dann folgt, dass

$$S(\Sigma_\alpha)\, \mathcal{R}\, A(\Sigma_\beta) = 0, \quad \forall \alpha > \beta.$$

D.h. die Linksideale $\mathcal{R} A(\Sigma_\beta)$ werden von allen $S(\Sigma_\alpha)$, mit $\alpha > \beta$, annihiliert.

$$\Rightarrow \quad S(\Sigma_\alpha)\Big|_{\mathcal{R} A(\Sigma_\beta)} = 0. \qquad (8.30)$$

Wir bemerken nun, dass der lineare Raum $V(\Sigma_\beta) := \mathcal{R} A(\Sigma_\beta)$ eine durch Linksmultiplikation mit $\pi \in S_N$ definierte Darstellung, ρ_{Σ_β}, von S_N trägt. In dieser Darstellung sind die Operatoren $S(\Sigma_\alpha)$, für alle Σ_α mit $\alpha > \beta$, gleich 0.

Hingegen gilt, dass $S(\Sigma_\alpha)\Big|_{V(\Sigma_\alpha)} \neq 0$. Um das zu zeigen, genügt es nachzuweisen, dass

$$S(\Sigma_\alpha)\, A(\Sigma_\alpha) \neq 0, \qquad (8.31)$$

da $A(\Sigma_\alpha) \in V(\Sigma_\alpha)$.

Zum Beweis von (8.31) rechnen wir mit (8.23) nach, dass

$$S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha) = 1 + \Big(\sum_{1\neq p \in P(\Sigma_\alpha)} p\Big) A(\Sigma_\alpha)$$

$$+ \; S(\Sigma_\alpha)\Big(\sum_{1\neq q \in Q(\Sigma_\alpha)} \mathrm{sign}(q)\, q\Big)$$

$$= 1 + \sum_{1\neq \pi \in S_N} \lambda_\pi \pi \neq 0\,!$$

Hier sind die λ_π gewisse reelle Zahlen.

Aus (8.30) und (8.31) folgt, dass die Darstellung ρ_{Σ_α} von S_N auf $V(\Sigma_\alpha)$ eine irreduzible Darstellung $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$ von S_N enthalten muss, die in keiner der Darstellungen ρ_{Σ_β} mit $\beta < \alpha$ auftreten kann.

Die Aequivalenzklasse der Darstellung $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$ soll nun bestimmt werden. Bevor wir dazu kommen, wollen wir uns aber überlegen, dass die Darstellungen $\rho_{\pi\Sigma_\alpha}$ und ρ_{Σ_α} zueinander <u>aequivalent</u> sind. Diese Aequivalenz wird eine Aequivalenz zwischen irreduziblen Teildarstellungen, $\overset{\circ}{\rho}_{\pi\Sigma_\alpha}$ und $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$, nach sich ziehen.

Wir definieren eine 1-1, invertierbare Abbildung

$$I_\pi : V(\Sigma_\alpha) \to V(\pi\Sigma_\alpha), \tag{8.32}$$

indem wir setzen

$$I_\pi\, r A(\Sigma_\alpha) = \pi r \pi^{-1} A(\pi\Sigma_\alpha), \quad \forall r \in R. \tag{8.33}$$

Falls $r A(\Sigma_\alpha) \neq 0$, dann ist auch

$$\pi r A(\Sigma_\alpha)\pi^{-1} = \pi r \pi^{-1} \pi A(\Sigma_\alpha)\pi^{-1}$$

$$\overset{(8.23)}{=} \pi r \pi^{-1} A(\pi\Sigma_\alpha) \neq 0\,!$$

Also ist I_π wohl definiert. Weiter ist I_π invertierbar, denn $I_\pi^{-1} = I_{\pi^{-1}}$ auf $V(\pi\Sigma_\alpha)$.

Nun gilt auf grund von (8.33), dass

$$\rho_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi)\,\rho_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi')\,\rho_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi^{-1})\, I_\pi\, r A(\Sigma_\alpha)$$

$$\overset{(8.33)}{=} \pi\, \pi'\, \pi^{-1}(\pi r \pi^{-1})\, A(\pi\Sigma_\alpha)$$

$$= \pi\,(\pi' r)\,\pi^{-1} A(\pi\Sigma_\alpha)$$

$$\overset{(8.33)}{=} I_\pi\, \pi' r A(\Sigma_\alpha) = I_\pi\, \rho_{\Sigma_\alpha}(\pi')\, r A(\Sigma_\alpha),$$

also

$$\rho_{\Sigma_\alpha}(\cdot) = I_\pi^{-1}\, \rho_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi)\, \rho_{\pi\Sigma_\alpha}(\cdot)\, \rho_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi)^{-1}\, I_\pi, \tag{8.34}$$

was die Aequivalenz beweist.

Die Darstellungen ρ_{Σ_α} sind also für festes α alle zueinander <u>aequivalent</u>!

Nun suchen wir die oben erwähnte, irreduzible Teildarstellung $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$ von ρ_{Σ_α}. Dazu rechnen wir mit (8.23):

$$S(\Sigma_\alpha)\,A(\Sigma_\alpha) = \sum_{p \in P(\Sigma_\alpha)} \sum_{q \in Q(\Sigma_\alpha)} p\,q\,\operatorname{sign}(q).$$

Wegen (8.24) gilt, dass

$$p\,S(\Sigma_\alpha)\,A(\Sigma_\alpha)\,q\,\operatorname{sign}(q) = S(\Sigma_\alpha)\,A(\Sigma_\alpha), \tag{8.35}$$

$\forall\, p \in P(\Sigma_\alpha),\ q \in Q(\Sigma_\alpha)$. Wir zeigen nun, dass $S(\Sigma_\alpha)\,A(\Sigma_\alpha)$, bis auf Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$, das <u>einzige</u> Element von $\mathcal{R}$ ist, das (8.35) erfüllt.

<u>Lemma 3.</u> Sei $a \in \mathcal{R}$ ein Element, das

$$p\,a\,q\,\operatorname{sign}(q) = a,$$

$\forall\, p \in P(\Sigma_\alpha),\ q \in Q(\Sigma_\alpha)$, erfüllt. Dann gilt:

$$a = \lambda\, S(\Sigma_\alpha)\, A(\Sigma_\alpha)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (8.36)$$

<u>Beweis.</u> Wir haben immer eine Entwicklung

$$a = \sum_{\pi \in S_N} \lambda_\pi\, \pi\,, \quad \lambda_\pi \in \mathbb{R}. \qquad (8.37)$$

Wenn (8.37) in (8.36) eingesetzt wird, findet man, dass

$$\sum_{\pi \in S_N} \lambda_\pi\, \pi = \sum_{\pi \in S_N} \lambda_\pi \operatorname{sign}(q)\, p\pi q\,. \qquad (8.38)$$

Auf der linken Seite von (8.38) hat der einzige Term $\propto pq$ den Koeffizienten λ_{pq}. Auf der rechten Seite hat der einzige Term $\propto pq$ den Koeffizienten $\lambda_1 \operatorname{sign}(q)$, (entspr. $\pi = 1$). Also

$$\lambda_{pq} = \lambda_1 \operatorname{sign}(q)\,, \qquad (8.39)$$

$\forall\ p \in P(\Sigma_\alpha),\ q \in Q(\Sigma_\alpha)$. ($\Rightarrow \lambda_{pq}$ <u>unabh.</u> von p.)

Sei $\pi \in S_N$ <u>nicht</u> von der Form $p\cdot q$, mit $p \in P(\Sigma_\alpha)$, $q \in Q(\Sigma_\alpha)$. Dann ist

$$\pi\, \Sigma_\alpha \neq p\cdot q\, \Sigma_\alpha,\ \forall\, p \in P(\Sigma_\alpha),\, q \in Q(\Sigma_\alpha).$$

Nach Lemma 1 gibt es dann zwei Ziffern, i und j, die in einer einzigen Zeile von Σ_α und in einer einzigen Kolonne von $\pi \Sigma_\alpha$ sitzen.

Sei t die Transposition von i und j. Dann ist

$$t' := \pi^{-1} t \pi \tag{8.40}$$

die Transposition von $\pi^{-1} i$ und $\pi^{-1} j$, die in der gleichen Kolonne von $\pi^{-1}(\pi \Sigma_\alpha) = \Sigma_\alpha$ sitzen.

Es folgt, dass

$$t \in P(\Sigma_\alpha), \quad t' \in Q(\Sigma_\alpha).$$

In (8.38) können wir daher $p = t$ und $q = t'$ setzen. Für das oben gewählte Element $\pi \in S_N$ folgt dann mit (8.40):

$$\left. \begin{aligned} & p \pi q = t \pi t' = t \pi \pi^{-1} t \pi = t^2 \pi = \pi, \\ \text{und} \quad & \operatorname{sign}(q) = \operatorname{sign}(t') = -1. \end{aligned} \right\} \tag{8.41}$$

Vergleich der Beiträge $\propto \pi$ auf der linken und der rechten Seite von (8.38) ergibt mit (8.41), dass

$$\lambda_\pi = -\lambda_\pi, \text{ also } \lambda_\pi = 0. \tag{8.42}$$

Also sind die Koeffizienten aller Permutationen

$\pi \notin P(\Sigma_\alpha)\, Q(\Sigma_\alpha)$ gleich 0! Mit (8.39) folgt

nun, dass

$$\alpha = \sum_{\substack{p \in P(\Sigma_\alpha) \\ q \in Q(\Sigma_\alpha)}} \lambda_1 \operatorname{sign}(q)\, p \cdot q = \lambda_1\, S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha).$$

Q.E.D.

<u>Korollar 4.</u>

Sei $r \in R$ beliebig. Dann gilt

$$S(\Sigma_\alpha)\, r\, A(\Sigma_\alpha) = \lambda_r\, S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha),$$

für ein $\lambda_r \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis.</u> Seien $p \in P(\Sigma_\alpha)$, $q \in Q(\Sigma_\alpha)$. Dann gilt nach (8.24), dass

$$p\, S(\Sigma_\alpha)\, r\, A(\Sigma_\alpha)\, q \operatorname{sign}(q) = S(\Sigma_\alpha)\, r\, A(\Sigma_\alpha),$$

$\forall\, p \in P(\Sigma_\alpha),\ q \in Q(\Sigma_\alpha)$. Nach Lemma 3 gilt dann, dass

$$S(\Sigma_\alpha)\, r\, A(\Sigma_\alpha) = \lambda_r\, S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha),$$

für ein $\lambda_r \in \mathbb{R}$.

Q.E.D.

$$\Rightarrow \quad S(\Sigma_\alpha)\, R\, A(\Sigma_\alpha) = \mathbb{R} \cdot S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha). \quad (8.43)$$

Daher, da $A(\Sigma_\alpha)$ und $S(\Sigma_\alpha)$ in $\mathcal{R}$,

$$(S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\mathcal{R}\ (S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha))$$
$$= S(\Sigma_\alpha)\left(A(\Sigma_\alpha)\mathcal{R}\, S(\Sigma_\alpha)\right)A(\Sigma_\alpha)$$
$$= S(\Sigma_\alpha)\,\mathcal{R}\,A(\Sigma_\alpha) = \mathbb{R}\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha). \quad (8.44)$$

Nun behaupten wir, dass $\mathcal{R}\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$ ein <u>minimales</u> Linksideal ist, und daher der lineare Raum $\mathcal{R}\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$ eine <u>irreduzible</u> Darstellung, $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$, von S_N trägt.

Um dies zu sehen, nehmen wir an, es sei $\mathcal{J}$ ein Teilideal von $\mathcal{R}\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$. Dann folgt aus (8.44), dass

$$\underbrace{\underbrace{S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)}_{\in\mathcal{R}}\mathcal{J}}_{\subset\mathcal{J}} \subseteq \mathbb{R}\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha).$$

Daraus folgt, dass entweder

$$S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\mathcal{J} = \mathbb{R}\cdot S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha),$$

oder

$$S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\mathcal{J} = 0.$$

Im ersten Fall folgt dann, dass

$$R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha) = R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J},$$

und daher, da $\mathcal{J}$ ein Teilideal von $R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$ ist, dass

$$R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha) = \mathcal{J}.$$

Im zweiten Fall folgt, dass

$$\mathcal{J}^2 \subseteq R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\mathcal{J} = 0, \text{ also } \mathcal{J} = 0,$$

da es ausser $\{0\}$ keine nilpotenten Linksideale gibt. Damit ist bewiesen, dass $R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$ minimal ist.

Wir behaupten nun, dass die minimalen Linksideale $R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$ und $R\,S(\Sigma_\beta)A(\Sigma_\beta)$, mit $\alpha > \beta$, inaequivalente Darstellungen von S_N, $\overset{0}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$, resp. $\overset{0}{\rho}_{\Sigma_\beta}$, tragen. Denn es folgt aus (8.30), dass für $\alpha > \beta$

$$S(\Sigma_\alpha)R\,S(\Sigma_\beta)A(\Sigma_\beta) \subseteq S(\Sigma_\alpha)R\,A(\Sigma_\beta) = 0,$$

und daher für jedes $v \in R\,S(\Sigma_\beta)A(\Sigma_\beta)$, dass

$$S(\Sigma_\alpha)\, v = 0 . \tag{8.45}$$

Falls die Darstellungen auf $\mathcal{R}\, S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha)$ und $\mathcal{R}\, S(\Sigma_\beta) A(\Sigma_\beta)$ aequivalent wären, schlössen wir aus (8.45), dass

$$S(\Sigma_\alpha)\, w = 0 , \quad \forall w \in \mathcal{R}\, S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha). \tag{8.46}$$

Setzen wir aber $w = S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha)$, so finden wir auf grund von $S(\Sigma_\alpha)^2 = f_\alpha S(\Sigma_\alpha)$ (siehe S. 196, nach (8.24)), mit $f_\alpha \neq 0$, dass

$$S(\Sigma_\alpha)\, w = f_\alpha S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha) = f_\alpha w \neq 0,$$

was (8.46) widerspricht!

Weiter behaupten wir, dass die Darstellungen $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$ und $\overset{\circ}{\rho}_{\pi\Sigma_\alpha}$ für alle $\pi \in S_N$ aequivalent sind. Auf grund der Definition von I_π gilt, dass

$$\begin{aligned} I_\pi\, r\, S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha) &= \pi r \pi^{-1} \pi S(\Sigma_\alpha) \pi^{-1} A(\pi \Sigma_\alpha) \\ &= \pi r \pi^{-1} S(\pi\Sigma_\alpha) A(\pi\Sigma_\alpha), \end{aligned} \tag{8.47}$$

d.h. I_π bildet den Darstellungsraum von $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$ 1–1 auf den Darstellungsraum von $\overset{\circ}{\rho}_{\pi\Sigma_\alpha}$ ab.

Weiter folgt aus (8.33) und (8.47), dass

$$\overset{\circ}{\rho}_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi)\,\overset{\circ}{\rho}_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi')\,\overset{\circ}{\rho}_{\pi\Sigma_\alpha}(\pi^{-1})\,I_\pi\, r\, S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$$

$$= \pi\,\pi'\,\pi^{-1}\,\pi\, r\; S(\Sigma_\alpha)\,\pi^{-1} A(\pi\,\Sigma_\alpha)$$

$$= I_\pi\;\pi' r\; S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$$

$$= I_\pi\;\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}(\pi')\; r\; S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha). \qquad (8.48)$$

Offensichtlich folgt unsere Behauptung aus (8.47) und (8.48); (siehe auch (8.34)).

> Damit haben wir gezeigt, dass jedes Linksideal $R\,S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)$ eine irreduzible Darstellung, $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$, von S_N trägt, und
>
> $$\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha} \sim \overset{\circ}{\rho}_{\pi\Sigma_\alpha},\ \forall \pi \in S_N, \text{ aber } \overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha} \not\sim \overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\beta}, \text{ für } \alpha \neq \beta.$$

Die Aequivalenzklasse der Darst. $\overset{\circ}{\rho}_{\Sigma_\alpha}$ werde mit ρ_α bezeichnet. Dann haben wir gezeigt, dass

$$\#\{\rho_\alpha\} = \#\text{ der Lösungen der Bedingungen}$$
$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_h,\ \text{mit } \sum_{\nu=1}^{h} \alpha_\nu = N. \qquad (8.49)$$

(Siehe (8.21)!) Nun ist es aber wohl bekannt, dass jede Lösung α von (8.49) genau einer <u>Konjugationsklasse</u> von Permutationen entspricht, nämlich derjenigen Klasse von Permutationen mit Zyklen der Längen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$.

Es ist aber für jede endliche Gruppe die Zahl der inaequivalenten, irreduziblen Darstellungen gleich der Zahl der Konjugationsklassen von Gruppenelementen. Denn aufgrund des Peter-Weyl Theorems sind ja die inaequivalenten, irreduziblen Charaktere vollständig im Raum der Klassenfunktionen, dessen Dimension gleich der Anzahl der Konjugationsklassen ist. Damit folgt, dass wir <u>alle</u> irreduziblen Darstellungen von S_N gefunden haben!

Nun konstruieren wir schliesslich die Idempotenten, oder Projektoren, P_α, in $\mathcal{R}$, die auf die in der regulären Darstellung von S_N auf $\mathcal{R}$ enthaltenen Teildarstellungen $n_\alpha \rho_\alpha := \underbrace{\rho_\alpha \oplus \cdots \oplus \rho_\alpha}_{n_\alpha}$ projizieren, wo $n_\alpha = \dim \rho_\alpha$ die Multiplizität von ρ_α in der regulären Darstellung bezeichnet.

Lemma 5.

Die gesuchten zentralen Projektoren, $P_\alpha \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$, sind durch

$$P_\alpha = \gamma_\alpha \sum_{\pi \in S_N} \pi^{-1} S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha) \pi$$

$$= \gamma_\alpha \sum_{\pi \in S_N} S(\pi^{-1}\Sigma_\alpha) A(\pi^{-1}\Sigma_\alpha)$$

gegeben, wo γ_α eine relle (tatsächlich eine rationale) Zahl ist.

Beweis.

(1) Offensichtlich ist $P_\alpha \in \mathcal{R}$. Weiter vertauscht P_α mit $\mathcal{R}$, (d.h. $P_\alpha \in \mathcal{R}'$). Denn

$$\pi' P_\alpha = \gamma_\alpha \sum_{\pi \in S_N} \underbrace{(\pi'\pi^{-1})}_{\pi''} S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha) \underbrace{(\pi'\pi^{-1})^{-1}}_{(\pi'')^{-1}} \pi'$$

$$= P_\alpha \pi' \quad \Rightarrow \quad r P_\alpha = P_\alpha r, \quad \forall r \in \mathcal{R}.$$

Jeder Operator $A \in \mathcal{R}$, der mit allen Operatoren von $\mathcal{R}$ vertauscht, wird ein <u>zentraler</u> Operator genannt. (Deswegen nennt man die Projektoren P_α <u>zentrale</u> Projektoren.) Die zentralen Operatoren bilden eine abelsche Unteralgebra von $\mathcal{R}$, das sogenannte <u>Zentrum</u>, $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$, von $\mathcal{R}$. Diese Begriffe können allgemein in der Untersuchung von Algebren benützt werden.

(2) Nun behaupten wir, dass $P_\alpha P_\beta = 0$, für $\alpha \neq \beta$. Denn

$$P_\alpha P_\beta = \gamma_\alpha \gamma_\beta \left\{ \sum_{\pi \in S_N} \sum_{\pi' \in S_N} S(\pi^{-1} \Sigma_\alpha) \underbrace{A(\pi^{-1}\Sigma_\alpha) S((\pi')^{-1}\Sigma_\beta)}_{=0, \text{ nach Kor. } 2} \times A((\pi')^{-1}\Sigma_\beta) \right\}$$

$$= 0, \quad \text{für } \alpha \neq \beta.$$

(3) Nun zeigen wir, dass für geeignet gewählte Konstanten γ_α

$$P_\alpha^{\,2} = P_\alpha .$$

Zum Beweis rechnen wir:

$$P_\alpha^{\,2} = \sum_{\pi, \pi' \in S_N} S(\pi^{-1}\Sigma_\alpha) A(\pi^{-1}\Sigma_\alpha) S((\pi')^{-1}\Sigma_\alpha) A((\pi')^{-1}\Sigma_\alpha) \qquad (8.50)$$

Aus dem Beweis von Korollar 2 und Lemma 1 lernen wir, dass

$$A(\pi^{-1}\Sigma_\alpha) S((\pi')^{-1}\Sigma_\alpha) = 0, \qquad (8.51)$$

ausser wenn

$$\pi^{-1}\Sigma_\alpha = p' q' (\pi')^{-1} \Sigma_\alpha , \qquad (8.52)$$

für $p' \in P((\pi')^{-1}\Sigma_\alpha)$, $q' \in Q((\pi')^{-1}\Sigma_\alpha)$

Gl. (8.52) impliziert, dass

$$\pi^{-1}\Sigma_\alpha = (\pi')^{-1} p q \, \Sigma_\alpha , \qquad (8.53)$$

für $p \in P(\Sigma_\alpha)$, $q \in Q(\Sigma_\alpha)$

Setzt man (8.51) und (8.53) in (8.50) ein, so findet man, dass

$$P_\alpha^{\,2} = \gamma_\alpha^{\,2} \sum_{\substack{\pi' \in S_N \\ p \in P(\Sigma_\alpha) \\ q \in Q(\Sigma_\alpha)}} S((\pi')^{-1} pq\, \Sigma_\alpha)\, A((\pi')^{-1} pq\, \Sigma_\alpha) \times S((\pi')^{-1} \Sigma_\alpha)\, A((\pi')^{-1} \Sigma_\alpha)$$

$$= \gamma_\alpha^{\,2} \sum_{\substack{\pi' \in S_N \\ p, q}} (\pi')^{-1} pq\; S(\Sigma_\alpha)\, A(\Sigma_\alpha)\, q^{-1} p^{-1} \pi' \times (\pi')^{-1}\, S(\Sigma_\alpha)\, A(\Sigma_\alpha)\, \pi' \qquad (8.54)$$

Nun haben wir von (8.24), dass

$$A(\Sigma_\alpha)\, q^{-1} = A(\Sigma_\alpha)\, \mathrm{sign}(q^{-1}) = A(\Sigma_\alpha)\, \mathrm{sign}(q)$$

und

$$p^{-1}\, S(\Sigma_\alpha) = S(\Sigma_\alpha).$$

Also folgt mit (8.54), dass

$$P_\alpha^{\,2} = \gamma_\alpha^{\,2} \sum_{\pi' \in S_N} (\pi')^{-1} \left\{ \Big(\sum_{\substack{p \in P(\Sigma_\alpha) \\ q \in Q(\Sigma_\alpha)}} pq\, \mathrm{sign}(q) \Big) \times S(\Sigma_\alpha)\, A(\Sigma_\alpha)\, S(\Sigma_\alpha)\, A(\Sigma_\alpha) \right\} \pi'$$

$$\overset{(8.23)}{=} \gamma_\alpha^{\,2} \sum_{\pi' \in S_N} (\pi')^{-1} \left\{ S(\Sigma_\alpha)\, A(\Sigma_\alpha) \right\}^3 \pi' . \qquad (8.55)$$

Nach Korollar 4 wissen wir aber, dass

$$S(\Sigma_\alpha)\big(\underbrace{A(\Sigma_\alpha)S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)S(\Sigma_\alpha)}_{\in \mathcal{R}}\big)A(\Sigma_\alpha)$$

$$= \lambda_\alpha\ S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\ ,\ \lambda_\alpha \in \mathbb{R}. \quad (8.56)$$

Setzen wir (8.56) in (8.55) ein, so finden wir, dass

$$P_\alpha{}^2 = \gamma_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha \qquad (8.57)$$

Wählen wir $\gamma_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}$, so folgt, dass

$$P_\alpha{}^2 = P_\alpha .$$

Um den Beweis von Lemma 5 zu beschliessen, muss noch gezeigt werden, dass $P_\alpha \neq 0$, $\lambda_\alpha \neq 0$.

(4) $\underline{P_\alpha \neq 0,\ \lambda_\alpha \neq 0.}$

$$P_\alpha = \gamma_\alpha \sum_{\pi \in S_N} \pi^{-1} S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\pi$$

In jedem Term $\pi^{-1}S(\Sigma_\alpha)A(\Sigma_\alpha)\pi$ hat der Koeffizient des Einselements, $1 \in S_N$, den Wert 1.

Denn

$$\pi^{-1} S(\Sigma_\alpha) A(\Sigma_\alpha) \pi$$

$$= \sum_{\substack{p \in P(\Sigma_\alpha) \\ q \in Q(\Sigma_\alpha)}} \pi^{-1} p q \pi \; \mathrm{sign}(q)$$

Wenn nun $\pi^{-1} p q \pi = 1$, dann ist $pq = 1$, d.h. $p = q^{-1}$. Da $P(\Sigma_\alpha) \cap Q(\Sigma_\alpha) = \{1\}$, folgt dann, dass $p = q = 1$. D.h.

$$P_\alpha = \gamma_\alpha N! \cdot 1 + \gamma_\alpha \sum_{\substack{\pi \in S_N \\ \pi \neq 1}} \lambda_\pi^\alpha \pi ,$$

für reelle Zahlen λ_π^α. Daraus folgt, dass für $\gamma_\alpha \neq 0$ P_α nicht $= 0$ sein kann.

Nun gehört aber P_α zum Zentrum, $\mathfrak{Z}(\mathcal{R})$, von $\mathcal{R}$, und $\mathfrak{Z}(\mathcal{R})$ ist eine abelsche *Algebra. Eine abelsche *Algebra enthält aber <u>keine</u> nilpotenten Elemente. Daher folgt, dass wenn $\gamma_\alpha \neq 0$, dann $P_\alpha^2 \neq 0$. Mit (8.57) schliessen wir, dass für $\gamma_\alpha \neq 0$

$$P_\alpha^2 = \gamma_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha \neq 0$$

und, da $\gamma_\alpha \neq 0$ und $P_\alpha \neq 0$, finden wir nun, dass für $\gamma_\alpha \neq 0$ auch $\lambda_\alpha \neq 0$. Daher können wir $\gamma_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}$ setzen, und der Beweis von Lemma 5 ist vollständig.

<u>Bemerkung.</u> Eine *Algebra $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra mit Involution * : $A \to A^*$ $(A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^* \in \mathfrak{A})$

$\mathcal{R}$ ist eine *Algebra: Für $r = \sum \lambda_\pi \pi \in \mathcal{R}$ setzen wir

$$r^* := \sum \overline{\lambda}_\pi \pi^{-1}; \quad r^* \in \mathcal{R}.$$

$\mathfrak{z}(\mathcal{R})$ ist dann auch eine *Algebra. Denn wenn $A \in \mathcal{R}$

$$[A, B] = 0, \quad \forall B \in \mathcal{R},$$

erfüllt, dann gilt

$$B^* A^* - A^* B^* = 0, \quad \forall B \in \mathcal{R}.$$

Da $*$ eine Involution auf $\mathcal{R}$ ist, folgt

$$A^* C - C A^* = 0, \quad \forall\, C \in \mathcal{R};$$

daher $A^* \in \mathcal{Z}(\mathcal{R})$.

Alle endlich-dimensionalen, abelschen $*$Algebren sind isomorph zu Algebren von Funktionen auf einer endlichen Menge von Punkten. Daher enthalten sie keine nilpotenten Elemente. Projektoren in einer abelschen $*$Algebra sind selbstadjungierte (d.h. $*$-invariante) Elemente. Also haben wir, dass

$$P_\alpha^* = P_\alpha .$$

Dies kann auch leicht direkt eingesehen werden:

$$P_\alpha = \gamma_\alpha \sum_{\substack{\pi \\ p \in P(\Sigma_\alpha) \\ q \in Q(\Sigma_\alpha)}} \pi^{-1}\, p\, q\, \operatorname{sign}(q)\, \pi$$

$$\Rightarrow \quad P_\alpha^* = \bar{\gamma}_\alpha \sum_{\pi, p, q} \pi^{-1} q^{-1} p^{-1} \pi \, \operatorname{sign}(q)$$

Für feste p und q setzen wir $\pi = q^{-1}\pi'$.

Dann folgt, dass

$$P_\alpha^{\,*} = \bar{\gamma}_\alpha \sum_{p,q} \sum_{\pi'} (\pi')^{-1} p^{-1} q^{-1} \pi' \operatorname{sign}(q)$$

$$= \gamma_\alpha \sum_{p,q} \sum_{\pi'} (\pi')^{-1} p^{-1} q^{-1} \operatorname{sign}(q^{-1})\, \pi$$

$$= P_\alpha , \quad \text{da } \gamma_\alpha \text{ reell und } \operatorname{sign}(q) = \operatorname{sign}(q^{-1})$$

Sei nun Δ eine Darstellung von S_N auf einem Vektorraum V_Δ. Diese können wir mit Hilfe der Projektoren P_α nun leicht ausreduzieren.

Da $\dim \mathfrak{Z}(R) = \#$ inaequivalente, irreduzible Darstellungen von S_N

$= \#\ \alpha$, mit $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_h$ und $\sum_{\nu=1}^{h} \alpha_\nu = N$

$= \# \{P_\alpha\}$,

ist

$$\sum_\alpha P_\alpha = 1 . \tag{8.58}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_\alpha \Delta(P_\alpha) = 1 \big/_{V_\Delta} \tag{8.59}$$

Weiter ist $\Delta(P_\alpha)$ ein Projektor, da P_α ein Projektor ist. Der Projektor $\Delta(P_\alpha)$ projiziert auf einen Unterraum V_α von V_Δ, der eine Darstellung $\sim \underbrace{\rho_\alpha \oplus \cdots \oplus \rho_\alpha}_{n_\alpha(\Delta)}$ trägt.

Sei $V_\Delta = \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{N \text{ mal}}$, $\dim W = n$. (8.60)

Sei Δ durch Permutation der Faktoren W definiert.

<u>Lemma 6.</u>

Unter der Voraussetzung (8.60) gilt, dass

$$\Delta(P_\alpha) = 0,$$

wenn α ein Diagramm mit mehr als n Zeilen $(h > n)$ ist.

<u>Beweis.</u> Sei $\vec{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, eine Basis in W.

Jeder Vektor $v \in V_\Delta$ hat eine Darstellung

$$v = \sum_{j_1,\dots,j_n} v(j_1,\dots,j_N)\, \vec{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_N},$$

$v(j_1,\dots,j_N) \in \mathbb{C}$ (oder $\in \mathbb{R}$), $j_\ell = 1,\dots,n$, für $\ell = 1,\dots,N$. Nun ist

$$\Delta(P_\alpha)\, v = \gamma_\alpha \sum_{\pi \in S_N} \sum_{p \in P(\Sigma_\alpha)} \Big(\sum_{q \in Q(\Sigma_\alpha)} \operatorname{sign}(q)$$

$$\times\, v(j_{\pi p^{-1} q^{-1} \pi^{-1}(1)}, \dots, j_{\pi p^{-1} q^{-1} \pi^{-1}(N)}\Big),$$

Da jedes j_ℓ nur n Werte annehmen kann, kann man höchstens in n Variablen antisymmetrisieren, wie das durch die Summation über q geschieht. Andernfalls ergibt die Antisymmetrisierung $= 0$. Also muss $h \leq n$ sein, oder es folgt $\Delta(P_\alpha) = 0$.

Q.E.D.

Die hier skizzierte Behandlung der Darstellungstheorie von S_N, insbesondere das Schlüsselergebnis, Lemma 1, wurde von von Neumann gefunden; (sic B.L. van der Waerden, "Group Theory and Quantum Mechanics", Chapter V. Dieses Kap. V ist allerdings nicht gerade schön gelungen).

Nun kehren wir zur Quantenmechanik von N-Elektron Systemen zurück. In diesem Falle interessieren wir uns für

$$V_\Delta = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ mal}} = \mathcal{H}_S$$

<u>Es kommen also in der Ausreduktion von</u> $\Delta = V_S$ nur <u>Darstellungen zu Diagrammen</u> α <u>mit höchstens zwei Zeilen vor.</u> Die assoziierten Darstellungen auf dem Bahnraum $\mathcal{H}_B$ gehören daher zu Diagrammen mit höchstens 2 Kolonnen!

Nun beweisen wir den Satz von Weyl.

Auf $\mathcal{H}_S$ haben wir die Darstellung $U_S \otimes V_S$ von $SU(2) \times S_N$. Wir definieren

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{a}_S &= U_S(\mathcal{G}), \\ \mathcal{B}_S &= V_S(\mathcal{R}), \end{aligned}\right\} \qquad (8.61)$$

wo $\mathcal{G}$ die Gruppenalgebra der $SU(2)$ ist.

Die Algebra $\mathfrak{A}_S$ besteht aus (Grenzwerten von) Operatoren der Form

$$\sum_j \lambda_j \underbrace{A_j \otimes \cdots \otimes A_j}_{N \text{ mal}}, \quad A_j \in SU(2), \lambda_j \in \mathbb{C}. \qquad (8.62)$$

Den Satz von Weyl kann man wie folgt formulieren:

<u>Satz 7.</u>

$$\mathfrak{A}_S' = \mathcal{B}_S. \qquad (8.63)$$

Hier bedeutet $\mathfrak{A}_S'$ die Kommutante von $\mathfrak{A}_S$.

Wenn $\mathfrak{A}$ eine auf einem Vektorraum $\mathcal{H}$ dargestellte Algebra ist, so definiert man

$$\mathfrak{A}' = \{A \in End(\mathcal{H}) : [A, B] = 0, \forall B \in \mathfrak{A}\}$$

und nennt $\mathfrak{A}'$ die Kommutante von $\mathfrak{A}$. Im endlich-dimensionalen Fall gilt offenbar, dass

$$(\mathfrak{A}')' \equiv \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}. \qquad (8.64)$$

Aus (8.63) schliessen wir nun, dass

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_S) = \mathfrak{A}_S \cap \mathfrak{A}_S' \overset{(8.63)}{=} \mathfrak{A}_S \cap \mathcal{B}_S$$

$$\overset{(8.64)}{=} \mathcal{B}_S' \cap \mathcal{B}_S = \mathfrak{Z}(\mathcal{B}_S) \qquad (8.65)$$

Reduzieren wir also V_S mit Hilfe der <u>minimalen Projektoren</u> in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_S)$ in Darstellungen aus, die direkte Summen einer irreduziblen Darstellung π_s, $\left(\binom{0}{1/2} \leq s \leq \frac{N}{2}\right)$, sind, so reduzieren wir automatisch V_S in Darstellungen aus, die direkte

Summen einer Darstellung Δ_s sind, d.h.

$$U_S \otimes V_S = \bigoplus_s \pi_s \otimes \Delta_s \ ,$$

und die minimalen Projektoren in $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_S) = \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_S)$ projizieren auf Unterräume, die zu einer der Darstellungen $\pi_s \otimes \Delta_s$ gehören.

All dies sind einfache Folgerungen aus (8.63).

<u>Beweis von Satz 7.</u>

Sei T eine lineare Abbildung von $\mathcal{H}_S$ auf sich selbst. T hat eine Matrix-Darstellung, die man durch Wahl einer Basis in $\mathcal{H}_S$ konstruiert: Wir benützen die in (8.17) eingeführte Basis, d.h. $\chi \in \mathcal{H}_S$ wird nach der Basis $\{ \vec{e}_{s_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{s_N} \}_{s_j = \pm 1}$ entwickelt,

$$\chi = \sum_{\substack{s_j = \pm 1 \\ j = 1, \ldots, N}} \chi(s_1, \ldots, s_N) \ \vec{e}_{s_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{s_N} \ . \qquad (8.66)$$

In dieser Basis hat T die Matrix-Darstellung

$$T\chi = \sum_{s} \left(\sum_{s'} T^{s_1' \cdots s_N'}_{s_1 \cdots s_N} \chi(s_1', \ldots, s_N') \right) \vec{e}_{s_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{s_N}, \tag{8.67}$$

wo $s = (s_1, \ldots, s_N)$, $s' = (s_1', \ldots, s_N')$.

Wir nehmen nun an T vertausche mit allen Permutationen $V_s(\pi)$, $\pi \in S_N$; siehe (8.18).

Es sei

$$\chi_T(s_1, \ldots, s_N) = \sum_{s'} T^{s_1' \cdots s_N'}_{s_1 \cdots s_N} \chi(s_1', \ldots, s_N'). \tag{8.68}$$

Es soll nun gelten, dass

$$\chi_T(s_{1'}, \ldots, s_{N'}) = \sum_{s'} T^{s_1' \cdots s_N'}_{s_1 \cdots s_N} \chi(s_{1'}', \ldots, s_{N'}'), \tag{8.69}$$

wo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ 1' & 2' & \cdots & N' \end{pmatrix}$ eine beliebige Permutation in S_N ist. Indem man auf der R. S. von (8.68) die Summationsindices umbenennt, findet man

$$\sum_{s'} T^{s_{1'}' \cdots s_{N'}'}_{s_{1'} \cdots s_{N'}} \chi(s_{1'}', \ldots, s_{N'}') = \sum_{s'} T^{s_1' \cdots s_N'}_{s_1 \cdots s_N} \chi(s_{1'}', \ldots, s_{N'}'), \tag{8.70}$$

$\forall \chi$. Daraus folgt, dass

$$T^{s'_{1'} \cdots s'_{N'}}_{s_{1'} \cdots s_{N'}} = T^{s'_1 \cdots s'_N}_{s_1 \cdots s_N}, \text{ oder}$$

$$T_{\sigma_{1'} \cdots \sigma_{N'}} = T_{\sigma_1 \cdots \sigma_N}, \tag{8.71}$$

für $\sigma_j := \begin{pmatrix} s'_j \\ s_j \end{pmatrix}$.

Nun studieren wir die Aktion der Darstellung U_S von $SU(2)$ auf χ:

$$U_S(A)\chi = \sum_s \left(\sum_{s'} A^{s'_1}_{s_1} \cdots A^{s'_N}_{s_N} \chi(s'_1, \dots, s'_N) \right) \times \vec{e}_{s_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{s_N}, \tag{8.72}$$

wo $A \in SU(2)$. Wir benützen die Schreibweise

$$A_\sigma = A^{s'}_s, \quad \sigma := \begin{pmatrix} s' \\ s \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten nun, dass jede Abbildung $T \in End(\mathcal{H}_S)$ die mit allen $V_S(\pi)$, $\pi \in S_N$, vertauscht, d.h. $T \in \mathcal{B}'_S$, und deren Matrix-Darstellung daher (8.71) erfüllt, sich als endliche Summe von Produkten $A \otimes \cdots \otimes A$, $A \in SU(2)$, schreiben lässt. Daraus folgt, dass $T \in \mathfrak{A}_S$, und dies beweist Satz 7. In Matrix-Schreibweise,

$$T_{\sigma_1 \dots \sigma_N} = \sum_i \lambda_i \, A^i_{\sigma_1} \dots A^i_{\sigma_N} \, , \; A^i \in SU(2) ,$$

$$\lambda_i \in \mathbb{C} , \; \forall i , \text{ falls } T_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \text{ (8.71) erfüllt.} \tag{8.72}$$

Zum Beweis von (8.72) fasse man $A \in SU(2)$ als Vektor auf der 3-Sphäre auf:

$$A = a_0 \mathbb{1} + i \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \, , \quad a_0^2 + \vec{a}^{\,2} = 1 . \tag{8.73}$$

(Die Parameter $a_0, \vec{a}$ sind die Euler-Klein-Cayley'schen Parameter).

Wir definieren nun

$$T(l,m,n) := T_{\sigma_1 \dots \sigma_N} , \text{ falls}$$

$\sigma_i = \binom{1}{1}$ für l Werte von i,

$\sigma_i = \binom{1}{-1}$ " m " " i,

$\sigma_i = \binom{-1}{1}$ " n " " i, und

$\sigma_i = \binom{-1}{-1}$ " $N-l-m-n$ Werte von i, mit $l+m+n \leq N$. Da T nach (8.71) total symmetrisch ist, hängt $T(l,m,n)$ tatsächlich nur von l, m und n ab. Die Zahlen $T(l,m,n)$ durchlaufen alle komplexen Zahlen, falls T den Raum der total symmetrischen Tensoren durchläuft. Falls

$$T_{\sigma_1 \dots \sigma_N} = A_{\sigma_1} \cdots A_{\sigma_N}, \quad A \in SU(2),$$

dann ist nach (8.73)

$$T(l,m,n) = (a_0 + i a_3)^l (i a_1 - a_2)^m (i a_1 + a_2)^n (a_0 - i a_3)^{N-l-m-n}$$

$$= z^l \, \bar{z}^{N-l-m-n} \, w^m \, (-\bar{w})^n, \qquad (8.74)$$

wo $z = a_0 + i a_3$, $w = -a_2 + i a_1$; (z, w <u>beliebige</u> komplexe Zahlen, falls A durch λA ersetzt wird, $\lambda \in \mathbb{C}$).

Sei nun T ein total symmetrischer Tensor, der zu allen Tensoren der Form (8.74) <u>"orthogonal"</u> ist, d.h.

$$\sum_{\substack{l,m,n \\ l+m+n \leq N}} \overline{T(l,m,n)}\, z^l \bar{z}^{N-l-m-n} w^m (-\bar{w})^n = 0, \quad (8.7\ldots$$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$. Dann folgt sofort, dass

$$T(l,m,n) = 0, \quad \forall l,m,n.$$

Also $T = 0$. Das beweist, dass die Tensoren der Form (8.74) den Vektorraum der total symmetrischen Tensoren ezeugen, d.h. es folgt (8.72). Damit ist Satz 7 (der Weyl'sche Satz) bewiesen.

<u>Bemerkungen.</u>

1) Der gleiche Satz gilt auch für die 2-dimensionalen Darstellungen von $U(2)$, $SL(2)$, $GL(2)$, was trivial ist.

2) Ein analoger Satz gilt auch für die n-dimensionalen Darstellungen von $SU(n)$, $U(n)$, $SL(n)$, $GL(n)$, jedoch <u>nicht</u> für $SO(n)$.

Der Beweis ist eine einfache Verallgemeinerung des angeführten Beweises; ("unitärer Trick" von H. Weyl, Math. Zeitschr. 23, 271 (1925)).

3) Der Satz ist <u>falsch</u> für die höher-dimensionalen Darstellungen von $SU(n)$, ...

All dies beruht auf der Diskussion einfacher Verallgemeinerungen von (8.75).

Schlussbemerkung zur QM der N-Elektronensysteme: Der Satz von Weyl und das Pauli-Prinzip implizieren, dass der totale Spin, s, die Rasse, $\tilde{\Delta}(s)$, der Bahnwellenfunktion eines N-Elektronensystems festlegt. Die Rasse $\tilde{\Delta}(s)$ aber bestimmt wesentlich den Wert der "Austauschintegrale", also die Energie des Zustandes. So beeinflusst also der Spin s indirekt die Energie eines Zustandes.

Anwendung dieser Einsicht in der Physik der kondensierten Materie: Magnetische Eigenschaften, die vom Spin abhängen, wie <u>Ferromagnetismus</u>, sind Folgen der Austauschwechselwirkungen und daher durch die Rasse der Zustände tiefer Energie bestimmt.