6. Quantenmechanischer Drehimpuls; Teilchen mit Spin

6.1 Einführung

In diesem Kapitel untersuchen wir eine spezielle Gruppe sog. dynamischer Symmetrien abgeschlossener quantenmechanischer Vielteilchensysteme mit sphärisch-symmetrischen Potentialkräften: Die Gruppe, $SO(3)$, der Drehungen des physikalischen Raums.

Ein Beispiel eines solchen Systems ist:

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_N := L^2\Big(\mathbb{R}^{3N}, \prod_{j=1}^{N} d^3x_j\Big) = \bigotimes_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}^3, d^3x_j) \qquad (6.1)$$

Die Dynamik des Systems wird durch einen Hamiltonoperator, H, erzeugt, der die Form

$$H = T + V, \quad T = \sum_{j=1}^{N} \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m_j}, \quad \vec{p}_j = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_j \qquad (6.2)$$

hat (Ortsraumdarstellung), mit

$$V = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \equiv V(\underset{\sim}{x}), \qquad (6.3)$$

für ein Potential V, das invariant unter Euklidischen Bewegungen ist:

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{a}, \dots, R\vec{x}_N + \vec{a}) = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \qquad (6.4)$$

für alle $R \in SO(3)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

Die Selbstadjungiertheit von H, $H = H^*$ auf $D(H)$, wird z.B. mit Hilfe des Satzes von Kato, den wir in App. B diskutiert haben, studiert. Falls H s.a. ist dann ist die Zeitevolution des Systems durch

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) \qquad (5)$$

(Schrödinger Bild) gegeben. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Kato $\left(\|V\psi\| \leq a \|T\psi\| + b\|\psi\|,\ a < 1,\ b < \infty,\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3N}) \right)$ folgt aus (4), dass $U(t)$ mit den Euklidischen Bewegungen von $\mathbb{R}^3$ vertauscht: Wir definieren

$$(U(R,\vec{a})\psi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) := \psi(R^{-1}(\vec{x}_1 - \vec{a}), \ldots, R^{-1}(\vec{x}_N - \vec{a})) \qquad (6)$$

Man verifiziert leicht, dass

(a) $U(R_1, \vec{a}_1)\, U(R_2, \vec{a}_2) = U((R_1, \vec{a}_1) \circ (R_2, \vec{a}_2))$

$$= U(R_1 R_2,\ \vec{a}_1 + R_1 \vec{a}_2).$$

(b) $U(\mathbb{1}, \vec{0}) = \mathbb{1}$.

(c) $U(R, \vec{a})^{-1} = U((R,\vec{a})^{-1}) = U(R^{-1}, -R^{-1}\vec{a})$.

(d) $U(R,\vec{a})$ ist unitär, $\forall R \in SO(3)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

(e) $U(R,\vec{a})$ ist "stark" stetig in R und $\vec{a}$.

Der Beweis von (d) folgt aus der Bemerkung, dass die Jacobi Determinante

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| = 1, \quad \text{für} \quad \vec{y} = R^{-1}(\vec{x}-\vec{a}).$$

Auf dem in $\mathcal{H}$ dichten Bereich $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3N})$ gilt

$$\text{(f)} \quad U(R,\vec{a})\, \vec{x}_j\, U(R,\vec{a})^{-1} = R^{-1}(\vec{x}_j - \vec{a}), \ \forall j$$

$$\text{(g)} \quad U(R,\vec{a})\, \vec{p}_j\, U(R,\vec{a})^{-1} = R^{-1}\vec{p}_j \ , \ \forall j,$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"}\ U(R,\vec{a})\, T\, U(R,\vec{a})^{-1} = T$$

$$\text{(h)} \quad U(R,\vec{a})\, V\, U(R,\vec{a})^{-1} = V,$$ und (unter den Voraussetzungen des Satzes von Kato)

$$U(R,\vec{a})\, U(t)\, U(R,\vec{a})^{-1} = U(t). \tag{7}$$

Der Generator der Untergruppe der <u>Raumtranslationen</u> ist

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j \quad (\text{Totalimpuls}), \tag{8}$$

d.h.

$$U(\mathbb{1},\vec{a}) = \exp(i\, \vec{a}\cdot\vec{P}/\hbar) \tag{9}$$

Die Theorie der Darstellungen der Gruppe der Raumtranslationen ist die Theorie der <u>Fouriertransformation</u>

Ihnen noch weniger gut bekannt dürfte die Theorie der Darstellungen von $SO(3)$ sein. Sei $R(\vec{e}, \alpha)$ eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ mit Drehachse $\vec{e} \in S^2$ und Drehwinkel α. Es gilt

$$R(\vec{e}, \alpha) = \exp(\alpha \vec{I} \cdot \vec{e}), \quad \vec{I} = (I_1, I_2, I_3), \qquad (10)$$

wo

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Die Matrizen $\{I_1, I_2, I_3\}$ (infinitesimale Erzeugende der Rotationen um x-, y-, resp. z-Achse) bilden eine Basis der Liealgebra, $so(3)$, von $SO(3)$. Die Gl. (10) dürfte aus der linearen Algebra oder der Vorlesung über Mechanik bekannt sein.

$\{U(R(\vec{e}, \alpha))\}$ ist eine einparametrige, unitäre Gruppe auf $\mathcal{H}$. Nach dem Stone'schen Satz gilt deshalb:

$$U(R(\vec{e}, \alpha)) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \alpha L(\vec{e})\right), \qquad (12)$$

wo $L(\vec{e})$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ ist mit

$$L(\vec{e})\psi = i\hbar \frac{d}{d\alpha} U(R(\vec{e},\alpha))\psi\Big|_{\alpha=0}, \qquad (13)$$

für jedes $\psi \in D(L(\vec{e}))$. Sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3N})$. Dann ist

$$L(\vec{e})\psi = i\hbar \frac{d}{d\alpha} \psi(R^{-1}(\vec{e},\alpha)\underset{\sim}{x})\Big|_{\alpha=0}$$

$$= i\hbar\, \underset{\sim}{\nabla}\psi \cdot \frac{d}{d\alpha} R^{-1}(\vec{e},\alpha)\underset{\sim}{x}, \qquad (14)$$

wo $R\underset{\sim}{x} = (R\vec{x}_1, \dots, R\vec{x}_N)$, $\underset{\sim}{\nabla} = (\vec{\nabla}_1, \dots, \vec{\nabla}_N)$.

Nun gilt nach (10) und (11), dass

$$\frac{d}{d\alpha} R(\vec{e},\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \vec{I}\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{d}{d\alpha} R^{-1}(\vec{e},\alpha)\vec{x} = -(\vec{I}\cdot\vec{e})\vec{x} = -\vec{e}\wedge\vec{x}.$$

Daher

$$\frac{d}{d\alpha} R^{-1}(\vec{e},\alpha)\underset{\sim}{x} = -(\vec{e}\wedge\vec{x}_1, \dots, \vec{e}\wedge\vec{x}_N).$$

Damit folgt aus (14), dass

$$L(\vec{e})\psi = -i\hbar \sum_{j=1}^{N} (\vec{e}\wedge\vec{x}_j)\cdot(\vec{\nabla}_j\psi)(\underset{\sim}{x})$$

$$= \vec{e}\cdot\Big(\sum_{j=1}^{N} \vec{x}_j \wedge \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_j\psi\Big)(\underset{\sim}{x}), \qquad (15)$$

d.h.

$$L(\vec{e}) = \vec{e}\cdot\vec{L}, \qquad \vec{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{x}_j \wedge \vec{p}_j. \qquad (16)$$

Der Vektoroperator $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ heisst <u>Bahndrehimpulsoperator</u>, und aus (7), (g) und (16) folgt, dass

$$U(R)\,\vec{L}\,U(R^{-1}) = R^{-1}\vec{L}. \tag{17}$$

Nach (13) gilt, dass

$$L_k = i\hbar \frac{d}{d\alpha} U(R(\vec{e}_k, \alpha))\Big|_{\alpha=0} \equiv i\hbar\, dU(I_k), \tag{18}$$

$k = 1,2,3$. Die Liealgebra $so(3)$ ist durch die VR (Vertauschungsrelationen)

$$[I_i, I_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} I_k, \quad \varepsilon_{ijk} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix},$$

oder

$$[\vec{I}\cdot\vec{e}, \vec{I}\cdot\vec{e}\,'] = (\vec{e}\wedge\vec{e}\,')\cdot\vec{I} \tag{19}$$

charakterisiert. Da $\{U(R) : R \in SO(3)\}$ eine Darstellung von $SO(3)$ auf $\mathcal{H}$, also dU eine Darstellung von $so(3)$ auf $\mathcal{H}$, ist, folgt aus (18) und (19):

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k, \tag{20}$$

was man auch durch direktes Nachrechnen verifizieren kann, indem man $[p^i_j, x^l_k] = \frac{\hbar}{i}\delta^{il}\delta_{jk}$ benützt.

Da
$$U(R(\vec{e},\alpha))\,U(t) = U(t)\,U(R(\vec{e},\alpha)), \ \forall \vec{e}$$
(siehe (7)), folgt
$$\vec{e}.\vec{L}\ U(t) = U(t)\,\vec{e}.\vec{L}\,, \ \forall \vec{e}, \qquad (21)$$
d.h. für die hier betrachteten Systeme kommutiert der totale Bahndrehimpulsoperator $\vec{L}$ mit der Zeitevolution, d.h. $\vec{L}$ ist <u>Integral der Bewegung</u>.

Falls E ein diskreter Eigenwert des Hamiltonoperators H ist, so folgt aus (21), dass der zu E gehörige Eigenraum von H unter $\vec{L}$ und $U(R)$, $R \in SO(3)$, invariant ist, d.h. die Darstellung von $SO(3)$ auf $\mathcal{H}$ reduziert.

Wir wollen nun unsere Betrachtungen in einen etwas allgemeineren Rahmen stellen. Als Folge werden wir auf eine Verallgemeinerung der Wellenmechanik auf Teilchen mit innerem Drehimpuls, oder <u>Spin</u>, gelangen. Die Existenz des Spins wurde ursprünglich von <u>Pauli</u> aus den spektroskopischen Daten für Alkali Metalle abgeleitet, der dann später auch die darstellungstheoretische Interpretation des Spins fand.

Wir nennen eine Gruppe G eine <u>Symmetriegruppe</u> eines q.m. Systems S, wenn zu jedem $g \in G$ eine Symmetrietransformation σ_g von S, im Sinne von Kap. 5, gehört so, dass

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1 \cdot g_2} . \qquad (22)$$

Nach dem Satz von Wigner gehört zu jeder Symmetrie σ_g ein Operatorstrahl

$$\underset{\sim}{U}(g) = \{ e^{i\alpha} U(g) : \alpha \in \mathbb{R} \},$$

wo $U(g)$ <u>unitär</u> oder <u>anti-unitär</u> auf $\mathcal{H}$ ist.

Wählen wir aus $\underset{\sim}{U}(g)$ einen Repräsentanten $U(g)$ aus, $\forall g \in G$, so erhalten wir aus (22) <u>lokal</u>:

$$U(g_1)\, U(g_2) = \omega(g_1, g_2)\, U(g_1 \cdot g_2), \qquad (23)$$

mit $|\omega(g_1, g_2)| = 1$. Man nennt eine Darstellung

U von G, die (23) erfüllt eine <u>projektive</u> - oder <u>Strahldarstellung</u> von G auf $\mathcal{H}$ (durch unitäre und/oder anti-unitäre Operatoren $U(g)$). Falls man eine Phasenfunktion ϕ auf G so wählen kann, dass, für $U'(g) = \phi(g)\, U(g)$,

$$U'(g_1)\,U'(g_2) = U'(g_1 \cdot g_2),$$

d.h.

$$\omega(g_1, g_2) = \frac{\phi(g_1)\,\phi(g_2)}{\phi(g_1 \cdot g_2)}, \qquad (24)$$

dann heisst U' eine Darstellung von G, und man nennt $\omega(g_1, g_2)$ einen <u>"trivialen Faktor"</u> von G.

Sei M ein topologischer Raum. Ein Raum M', zusammen mit einer surjektiven Abbildung $\pi : M' \to M$, heisst <u>Überlagerung</u> von M, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U von p gibt so, dass $\pi^{-1}(U)$ eine endliche oder abzählbar unendliche Vereinigung von zu U homöomorphen Teilmengen von M' ist.

Falls $M = G$ eine Gruppe ist, so heisst G' eine Überlagerungsgruppe von G. Falls $M' \equiv \tilde{M}$ einfach zusammenhängend ist ($\pi_1(\tilde{M}) = \{0\}$), dann heisst $(\tilde{M}, \pi)$ <u>universelle Überlagerung</u> von M; $\tilde{G}$ heisst dann <u>universelle Überlagerungsgruppe</u> von G.

Elemente von $\tilde{G}$ sind Paare (g, γ), $g \in G$, $\gamma \in \pi_1(G)$, mit der Multiplikation

$$(g_1, \gamma_1)(g_2, \gamma_2) = (g_1 g_2, \gamma_1 \cdot \gamma_2)$$

und der Projektion $\pi(g, \gamma) = g$. Die Untergruppe $N := \{(e, \gamma) : e = \text{Neutralel. von } G, \gamma \in \pi_1(G)\}$ ist ein <u>Normalteiler</u> von $\tilde{G}$, der isomorph zu $\pi_1(G)$ ist. Für Gruppen ist $\pi_1(G)$ <u>abelsch</u>; ja N ist ein sog. "<u>zentraler Normalteiler</u>". Es gilt dann

$$G \cong \tilde{G}/N .$$

Von <u>V. Bargmann</u> (Ann. Math. <u>59</u>, 1 (1954)) stammt der folgende Satz, den wir hier nicht beweisen können

<u>Satz.</u> Jede stetige projektive Darstellung einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe G ist durch eine stetige, <u>unitäre</u> Darstellung von $\tilde{G}$ induziert.

<u>Bemerkungen.</u>

(1) Sei G eine <u>zusammenhängende</u> Gruppe, und U ein projektive Darstellung von G durch unitäre oder anti-unitäre Operatoren auf $\mathcal{H}$. Dann ist jeder Repräsentant $U(g)$ von $\underset{\sim}{U}(g)$ <u>unitär</u>, $\forall g \in G$. Denn, sei $V = V(e)$ eine hinreichend kleine Umgebung von $e \in G$. Zu jedem $g \in V$ gibt es dann ein $h \in V$ so, dass $g = h^2$. Daher gilt $U(g) = \omega(h,h)^{-1} U(h)^2$, und darum ist $U(g)$ unitär (für $U(h)$ unitär <u>oder</u> anti-unitär).

Nun gibt es zu jedem $g \in G$ $g_1, \dots, g_n \in V$ so, dass $g = g_1 \cdots g_n$. Also ist

$$\underset{\sim}{U}(g) = \{ e^{i\alpha} U(g_1) \cdots U(g_n) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

unitär, $\forall g \in G$.

(2) Der Satz besagt, dass für eine projektive Darstellung $\underset{\sim}{U}$ von G eine <u>unitäre</u> Darstellung

U von $\tilde{G}$ existiert so, dass $\forall g \in G$

$$\underset{\sim}{U}(g) = \{U(g,\gamma) : (g,\gamma) \in \tilde{G},\ \gamma \in \pi_1(G)\}. \quad (25)$$

(3) Anwendung: Sei S ein quantenmechanischer System, für welches $G = SO(3)$ eine Symmetriegruppe ist, d.h. es gibt eine projektive Darstellung $\underset{\sim}{U}$ von $SO(3)$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ von S, (mit $U(R_1)U(R_2) = \omega(R_1, R_2)U(R_1 \cdot R_2)$).

Dann gibt es eine unitäre Darstellung U von $\widetilde{SO(3)}$ auf $\mathcal{H}$ so, dass (25) gilt. (Denn $SO(3)$ ist kompakt und zusammenhängend.) Was ist $\widetilde{SO(3)}$?

6.2. $SU(2)$ als universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$.

Wir definieren die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ist eine Basis von $M_2(\mathbb{C})$. Die Matrizen $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind hermite'sch (selbstadjungiert).

Die Matrizen $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ sind eine Basis im dreidimensionalen Raum der spurfreien Matrizen. Jede hermite'sche 2×2 Matrix X mit $Sp\, X = 0$ hat daher die Darstellung

$$X = \sum_{k=1}^{3} x_k \sigma_k\,, \quad x_k \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Die Zahlen x_1, x_2, x_3 kann man als die Komponenten eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ auffassen. Es gilt

$$X = X^*, \quad Sp\, X = 0, \quad \det X = -|\vec{x}|^2. \tag{28}$$

Als Spezialfall finden wir

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_i = \sigma_i^*, \quad Sp\, \sigma_i = 0, \quad \det \sigma_i = -1 \\ \text{Offensichtlich gilt auch} \quad \sigma_i^2 = 1. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Weiter haben wir

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$$

$$\sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3$$

Allgemein

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i\varepsilon_{klm}\sigma_m \tag{30}$$

Daraus folgt, dass

$$\left[\tfrac{1}{i}\sigma_k, \tfrac{1}{i}\sigma_l\right] = 2\varepsilon_{klm}\tfrac{1}{i}\sigma_m\,, \tag{31}$$

d.h. die Matrizen $\left\{\frac{1}{2i}\sigma_1, \frac{1}{2i}\sigma_2, \frac{1}{2i}\sigma_3\right\}$ definieren eine Darstellung der VR (19), die die Liealgebra, so(3), der Drehgruppe SO(3) definieren. Die Matrizen

$$S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j \tag{32}$$

erfüllen daher die VR

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} S_k \tag{33}$$

der Drehimpulsalgebra.

Nun definieren wir die Gruppe SU(2):

$$SU(2) = \{ U \in M_2(\mathbb{C} : U^* = U^{-1},\ \det U = 1\} \tag{34}$$

Für $U \in SU(2)$ gilt $U = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}$,

$$\text{mit} \quad \det U = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \tag{35}$$

Die Gl. (35) definiert die Einheitssphäre, S^3, in $\mathbb{R}^4$, d.h. SU(2) ist <u>topologisch</u> die S^3. Die Punkte auf S^3 können wir wie folgt parametrisieren:

$$a = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{e}, \quad \vec{e} \in S^2, \tag{36}$$

mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$. In dieser Parametrisierung gilt

$$U = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i\sin\frac{\theta}{2}(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})$$

$$= \exp -i\frac{\theta}{2}(\vec{e}\cdot\vec{\sigma}), \quad \vec{e}\cdot\vec{\sigma} \equiv \sum_k e_k\sigma_k. \tag{37}$$

(Man beachte, dass $(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}$!)

Sei $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ wie in (27), und $U \in SU(2)$. Wir definieren $X_U := U X U^{-1}$. Dann gilt

$$X_U^* = (U^{-1})^* X^* U^* = U X U^{-1} = X_U ,$$

$$Sp\, X_U = Sp(U X U^{-1}) = Sp(U^{-1} U X) = Sp\, X = 0 ,$$

und $\det X_U = \det X \, |\det U|^2 = \det X = - |\vec{x}|^2$.

Also gibt es einen Vektor $\vec{x}_U \in \mathbb{R}^3$ so, dass $X_U = \vec{x}_U \cdot \vec{\sigma}$, mit $|\vec{x}_U| = |\vec{x}|$. Die Abbildung $\vec{x} \mapsto \vec{x}_U$ ist offensichtlich <u>linear</u>, und, da $|\vec{x}_U| = |\vec{x}|$, gibt es daher eine 3×3 Matrix $R(U) \in O(3)$ so, dass

$$\vec{x}_U = R(U)\vec{x} , \quad \forall U \in SU(2). \qquad (38)$$

Selbstverständlich gilt $R(U_1)R(U_2) = R(U_1 \cdot U_2)$. Da $SU(2)$ zusammenhängend ist und $R(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3}$, also $\det R(\mathbb{1}) = 1$, folgt $\det R(U) = 1$, also $R(U) \in SO(3)$, $\forall U \in SU(2)$, d.h. $R: U \mapsto R(U)$ ist ein <u>Homomorphismus</u> von $SU(2)$ nach $SO(3)$. Diesen wollen wir nun noch etwas genauer untersuchen:

Sei $R(\vec{e}, \theta)$ eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ um die Achse $\vec{e}$ mit Drehwinkel θ. Wir haben gesehen, dass

$$\frac{d}{d\theta} R(\vec{e},\theta)\vec{x} = R(\vec{e},\theta)\,\vec{e}\wedge\vec{x} = \vec{e}\wedge R(\vec{e},\theta)\vec{x}, \text{ also}$$

$$\frac{d}{d\theta} R(\vec{e},\theta)^T\vec{\sigma} = -\vec{e}\wedge R(\vec{e},\theta)^T\vec{\sigma}. \qquad (39)$$

Sei $U(\vec{e},\theta) = \exp -i\frac{\theta}{2}(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})$. Auf grund von (31) gilt

$$\frac{d}{d\theta} U(\vec{e},\theta)\,\vec{\sigma}\,U(\vec{e},\theta)^*$$

$$= -U(\vec{e},\theta)\,\frac{i}{2}[\vec{e}\cdot\vec{\sigma},\vec{\sigma}]\,U(\vec{e},\theta)^*$$

$$= -\vec{e}\wedge\left(U(\vec{e},\theta)\,\vec{\sigma}\,U(\vec{e},\theta)^*\right) \qquad (40)$$

Es folgt, dass die matrixwertigen Funktionen

$$\vec{F}_1(\theta) = R(\vec{e},\theta)^T\vec{\sigma} \quad \text{und} \quad \vec{F}_2(\theta) = U(\vec{e},\theta)\,\vec{\sigma}\,U(\vec{e},\theta)^*$$

beide die Differentialgl.

$$\frac{d}{d\theta}\vec{F}_i(\theta) = -\vec{e}\wedge\vec{F}_i(\theta), \quad \vec{F}_i(0) = \vec{\sigma} \qquad (41)$$

erfüllen. Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten folgt, dass $\vec{F}_1(\theta) = \vec{F}_2(\theta)$, d.h.

$$U(\vec{e},\theta)\vec{\sigma}\,U(\vec{e},\theta) = R(\vec{e},\theta)^T\vec{\sigma},$$

oder

$$U(\vec{e},\theta)(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})U(\vec{e},\theta) = R(\vec{e},\theta)\vec{x}\cdot\vec{\sigma}, \qquad (42)$$

$\forall\ \theta\in[0,2\pi],\ \forall\ \vec{e}\in S^2.$

Damit ist gezeigt, dass $U \mapsto R(U)$ surjektiv ist.

Der Kern der Abbildung $R: SU(2) \to SO(3)$ ist offensichtlich $\{U = \pm \mathbb{1}\}$, wie man sich leicht überlegt; ($UXU^* = X \Rightarrow U$ vertauscht mit $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow U$ vertauscht mit allen $V \in SU(2)$ $\Rightarrow U = \lambda \mathbb{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Da $U \in SU(2) \Rightarrow \lambda = \pm 1$.)

Es folgt, dass

$$SO(3) = SU(2) / \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \tag{43}$$

Da $SU(2) \sim S^3$ einfach zusammenhängend ist, schliessen wir, dass $SU(2) = \widetilde{SO(3)}$ die universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ ist.

Die Liealgebren einer Liegruppe G und ihrer universellen Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$ sind isomorph; (denn Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G = Tangentialraum von G in e). Daher gilt

$$so(3) \cong su(2), \tag{44}$$

was (19) und (31) entspricht.

6.3 Allgemeine, drehinvariante quantenmechanische Systeme.

Nach diesem Exkurs über $SU(2)$ kehren wir nun zu Bemerkung (3), S. 238, also zur Untersuchung allgemeiner, drehinvarianter quantenmechanischer Systeme zurück.

Falls $SO(3)$ eine dynamische Symmetriegruppe des System S ist, dann gibt es – wie wir nun gelernt haben – eine unitäre Darstellung, U, von $\widetilde{SO}(3) = SU(2)$ auf dem Hilbertraum, $\mathcal{H}$, des Systems, die mit seiner Zeitevolution vertauscht. D. h.: Zu jedem $g \in SU(2)$, $t \in \mathbb{R}$, gibt es eine Phase $\omega(g,t)$, mit $|\omega(g,t)| = 1$, so, dass

$$U(g)\, e^{-itH/\hbar} = \omega(g,t)\, e^{-itH/\hbar}\, U(g). \qquad (45)$$

Da $e^{-i(t+s)H/\hbar} = e^{-itH/\hbar} e^{-isH/\hbar}$, folgt aus (45)

$$\omega(g,t+s) = \omega(g,t)\,\omega(g,s). \qquad (46)$$

Aus der Stetigkeit von $\omega(g,t)$ in t und (46) folgt

$$\omega(g,t) = \exp i\chi(g)t, \qquad (47)$$

für eine stetige Funktion χ auf $SU(2)$. Da $U(g_1 \cdot g_2) = U(g_1)\,U(g_2)$, folgt aus (45) und (47), dass

$$\chi(g_1 \cdot g_2) = \chi(g_1) + \chi(g_2),$$

für alle $g_1, g_2 \in SU(2)$, d.h. χ ist eine <u>eindimensionale Darstellung</u> von $SU(2)$. Aber $SU(2)$ hat nur eine einzige, eindimensionale Darstellung: die <u>triviale</u>. Daher folgt, dass $\chi(g) = 0$, $\forall g \in SU(2)$, und damit, dass

$$U(g)\, e^{-itH/\hbar} = e^{-itH/\hbar}\, U(g), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in SU(2). \tag{48}$$

Die Darstellung U von $SU(2)$ definiert eine Darstellung dU der Liealgebra $su(2)$ auf $\mathcal{H}$:

$$dU\left(\frac{1}{2i}\vec{\sigma}\cdot\vec{e}\right) = \frac{d}{d\theta}\, U\left(\exp -i\frac{\theta}{2}(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\right)\Big|_{\theta=0} \tag{49}$$

Definieren wir die totalen Drehimpulsoperatoren J_k, $k = 1,2,3$, durch

$$J_k := i\hbar\, dU\left(\frac{1}{2i}\sigma_k\right) = dU(S_k), \tag{50}$$

(siehe (31), (32)), dann folgt aus (33), dass

$$[J_k, J_l] = i\hbar\, \varepsilon_{klm} J_m, \tag{51}$$

also die VR der Drehimpulsalgebra. Aus (48) folgt dann, dass

$$[J_k, H] = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{52}$$

d.h. die J_k's sind <u>Integrale der Bewegung</u>.

Seien nun S_1 und S_2 zwei q. m. Systeme, für die $SO(3)$ eine dynamische Symmetriegruppe ist. Beispielsweise seien S_1 und S_2 zwei Elektronen, oder zwei Atome, oder zwei Moleküle. Wir erwarten, dass $SO(3)$ eine Symmetrie des Gesamtsystems, $S_1 \vee S_2$, ist, die dann eine dynamische Symmetrie von $S_1 \vee S_2$ ist, falls das Potential der Wechselwirkung zwischen S_1 und S_2 rotationsinvariant ist. Die Darstellungen U_1 und U_2 auf $\mathcal{H}_1$, resp. $\mathcal{H}_2$, sollen also eine Darstellung U von $SU(2)$ auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ definieren. <u>Frage</u>: <u>Wie bestimmt man U aus U_1 und U_2?</u>

Zur Beantwortung beginnen wir mit einer mathematischen Vorbemerkung. Sei G eine Gruppe und U_1, U_2 zwei Darstellungen auf Räumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$. Wir definieren die <u>Tensorproduktdarstellung</u> $U_1 \otimes U_2$ auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ durch

$$(U_1 \otimes U_2)(g) = U_1(g) \otimes U_2(g), \qquad (53)$$

für alle $g \in G$. Falls G eine Lie'sche Gruppe mit

Lie algebra $\mathfrak{g}$ ist, dann kann jedes g in einer hinreichend kleinen Umgebung von e als $g = \exp X$, $X \in \mathfrak{g}$, geschrieben werden. Umgekehrt gilt für kompakt Gruppen, dass $\exp X \in G$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. Die Gruppenelemen $g(s) = \exp(s \cdot X)$, $s \in \mathbb{R}$, bilden eine einparametrige Untergruppe von X, mit $g(0) = e$. Nach (53) haben wir, dass

$$(U_1 \otimes U_2)(g(s)) = U_1(g(s)) \otimes U_2(g(s)). \qquad (54)$$

Damit finden wir:

$$\begin{aligned} d(U_1 \otimes U_2)(X) &= \frac{d}{ds}(U_1 \otimes U_2)(g(s))\Big|_{s=0} \\ &\overset{(54)}{=} \Big[\frac{d}{ds} U_1(g(s)) \otimes U_2(g(s)) \\ &\qquad + U_1(g(s)) \otimes \frac{d}{ds} U_2(g(s))\Big]_{s=0} \\ &= dU_1(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes dU_2(X), \qquad (55) \end{aligned}$$

$\forall X \in \mathfrak{g}$.

Für S_1, S_2, $G = SU(2)$ folgt also:

$$(U_1 \otimes U_2)(g) = U_1(g) \otimes U_2(g), \quad \forall g \in SU(2).$$

$$J_k = d(U_1 \otimes U_2)(S_k) = J_k^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_k^{(2)}, \qquad (56)$$

für $k = 1, 2, 3$.

Spiegelungssymmetrie (Parität P) und Zeitumkehrinvarianz (T) von q.m. Systemen.

Falls S spiegelungsinvariant ist, dann gehört zur Raumspiegelung $P: \vec{x} \mapsto -\vec{x}$ eine Transformation $U(P)$ auf $\mathcal{H}$ die, nach dem Satz von Wigner, unitär oder antiunitär ist.

Aufgabe: Zeige, dass $U(P)e^{-itH/\hbar} = e^{-itH/\hbar}U(P)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, falls P eine dynamische Symmetrie von S ist. Für physikalische Systeme ist der Hamiltonoperator nach unten beschränkt, d.h. sein Spektrum, $\sigma(H)$, erfüllt:

$$\sigma(H) \subseteq [-E_0, \infty), \quad E_0 < \infty . \tag{57}$$

Aber
$$\sigma(H) \not\subseteq [-E_0, E_0], \tag{58}$$

insbesondere ist $\sigma(H)$ nicht symmetrisch um 0. Zeige nun, dass aus (57) und (58) folgt, dass $U(P)$ unitär ist, und dass die Eigenwerte von $U(P) = \pm 1$ sind. Falls ψ ein Eigenvektor von $U(P)$ ist, so heisst der zugehörige Eigenwert, π_ψ, die Parität von ψ.

Ähnliche Überlegungen kann man auch für die

<u>Zeitumkehr</u> anstellen. Falls S zeitumkehrinvariant ist, dann gehört zur Zeitumkehr $T: t \mapsto -t$ eine unitäre oder antiunitäre Transformation $U(T)$ auf $\mathcal{H}$ so, dass

$$U(T)\, e^{-itH/\hbar} = \omega(t)\, e^{itH/\hbar}\, U(T), \qquad (59)$$

mit $|\omega(t)| = 1$, und $U(T)^2 = \beta \mathbb{1}$, $|\beta| = 1$. (60)

<u>Zeige:</u> Falls es <u>keine</u> <u>Zahl</u> $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $\sigma(H - \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{1})$ symmetrisch um 0 angeordnet ist, dann muss $U(T)$ <u>antiunitär</u> sein, $\omega(t) = 1$ und $\beta = \pm 1$. Weiter gilt dann $U(T) H = H\, U(T)$, (wo H der Hamilton Operator von S ist). Dieses Resultat stammt von <u>E. P. Wigner</u>.

Die Beweise der Eigenschaften von $U(P)$ und $U(T)$, sowie Beispiele und Anwendungen kommen in den Übungen vor.

Wir kehren nun zur Untersuchung der unitären Darstellungen von $SU(2)$ auf den Hilberträumen von q.m. Systemen mit dynamischer Rotationssymmetrie zurück. Ausgangspunkt bilden ein paar allgemeine Bemerkungen über Darstellungen kompakter Gruppen.

(a) Eine <u>Darstellung</u> π einer Gruppe G ist ein Homomorphismus von G in den Ring der regulären, linearen Transformationen eines Vektorraumes E.

(b) Die Darstellung π von G auf einem Hilbertraum E heisst <u>unitär</u>, falls $\pi(g)$ unitär ist, $\forall g \in G$; also $\pi(g)^* = \pi(g^{-1})$.

(c) Die Darstellung π von G auf E heisst <u>irreduzibel</u>, falls E keine nicht-trivialen Unterräume enthält, welche unter $\pi(G)$ invariant sind.

(d) <u>Schur'sches Lemma.</u>

(1) Seien (π, E) und (π', E') zwei irreduzible Darstellungen von G und $\varphi : E \to E'$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi\, \pi(g) = \pi'(g)\varphi \,, \quad \forall g \in G.$$

Dann ist $\varphi = 0$, oder φ ist ein <u>Isomorphismus.</u>

(2) Falls $\pi = \pi'$, $E = E'$, folgt

$$\varphi = \lambda \mathbb{1}_E \,, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sei nun G eine <u>kompakte</u> Gruppe.

(e) Falls (π, E) eine stetige, irreduzible Darstellung von G auf einem Banachraum E ist, dann ist E <u>endlich-dimensional.</u>

(f) Falls (π, E) eine endlich-dimensionale Darstellung von G ist, dann gibt es auf E ein Skalarprodukt so, dass π <u>unitär</u> ist; (Korollar der Existenz eines invarianten Haar'schen Masses auf G). $\Rightarrow$ <u>Die stetigen, irreduziblen Darstellungen kompakter Gruppen sind alle endlich-dimensional und unitär.</u>

(g) Jede unitäre Darstellung einer kompakten Gruppe auf einem Hilbertraum kann in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden: Sei U eine unitäre Darst. der kompakten Gruppe G auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es Unterräume $E_k \subset \mathcal{H}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, mit:

$E_k \perp E_l$, $k \neq l$, $\quad \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k = \mathcal{H}$,

E_k ist invariant unter $U(G)$, und $U/_{E_k}$ ist irreduzibel; ($\dim E_k < \infty$, $\forall k$).

(h) Sei (π, E) eine endlich-dimensionale Darstellung der kompakten Gruppe G auf E. Wir definieren den Charakter, χ_π, von π als

$$\chi_\pi(g) = Sp\, \pi(g). \tag{61}$$

Offensichtlich gilt:

$$\chi_\pi(hgh^{-1}) = \chi_\pi(g), \tag{62}$$

d.h. Charaktere sind Klassenfunktionen.

Charaktere aequivalenter Darstellungen sind identisch. Falls $\pi = \bigoplus_j \pi_j$, dann gilt:

$$\chi_\pi(g) = \sum_j \chi_{\pi_j}(g), \quad \forall g \in G. \tag{63}$$

(i) Sei $d\mu$ das auf 1 normierte, invariante Haar'sche Mass auf einer kompakten Gruppe G. Seien χ_1 und χ_2 Charaktere inaequivalenter, irreduzibler unitärer Darstellungen von G. Dann gilt:

$$\int_G \overline{\chi_1(g)}\, \chi_2(g)\, d\mu(g) = 0 \tag{64}$$

Falls χ ein irreduzibler Charakter von G ist, dann gilt

$$\int_G |\chi(g)|^2 \, d\mu(g) = 1. \qquad (65)$$

<u>Satz von Peter-Weyl.</u> Die irreduziblen Charaktere von G sind vollständig im Raum der quadrat-integrablen Klassenfunktionen auf G.

(j) Sei π eine Darstellung von G mit Charakter χ_π, und sei π_0 eine irreduzible Darstellung von G. Dann ist

$$n_{\pi_0} := \int \overline{\chi_{\pi_0}(g)}\, \chi_\pi(g)\, d\mu(g) \in \mathbb{Z}_+ \qquad (66)$$

die <u>Multiplizität</u> der Darstellung π_0 in π, d.h. π_0 kommt in π n_{π_0} mal vor. Sei E der Darstellungsraum der unitären Darstellung π, und sei E_0 der Unterraum von E mit der Eigenschaft, dass

$$\pi\big|_{E_0} = \underbrace{\pi_0 \oplus \cdots \oplus \pi_0}_{n_{\pi_0} \text{ mal}},$$

wo n_{π_0} durch (66) gegeben ist. Dann ist der orthogonale Projektor, P_{E_0}, auf E_0 durch

$$P_{E_0} := d_{\pi_0} \int_G \overline{\chi_{\pi_0}(g)}\, \pi(g)\, d\mu(g) \qquad (67)$$

gegeben, wo d_{π_0} die Dimension von π_0 ist.

(k) Anwendung auf $G = SU(2)$.

Das Haar'sche Mass, $d\mu$, von $SU(2)$ ist das auf 1 normierte uniforme Mass auf der 3-Sphäre $S^3 \simeq SU(2)$; (was könnte es anderes sein!).

Sei $F(g)$ eine Klassenfunktion auf $SU(2)$, d.h. $F(g) = F(hgh^{-1})$. Man überzeugt sich leicht, dass es zu jedem g einen Winkel α und ein $h \in SU(2)$ gibt so, dass

$$g = h \exp\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_3\right) h^{-1}.$$

Daraus folgt, dass $F(g) = f(\alpha)$, für eine Funktion f auf $[0, 2\pi)$.

<u>Satz.</u>

$$\int_{SU(2)} F(g)\, d\mu(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin^2\alpha \, d\alpha. \qquad (68)$$

<u>Anwendung.</u> Sei $\chi = \chi(\alpha)$ ein irreduzibler Charakter von $SU(2)$. Dann gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(\alpha)|^2 \sin^2\alpha \, d\alpha = 1. \qquad (69)$$

Beweis von (68): Übungen!

Nach dieser kurzen Exkursion in die Darstellungstheorie kompakter Gruppen verstehen wir nun, dass jede unitäre Darstellung von $SU(2)$ in eine direkte Summe endlich-dimensionaler, irreduzibler Darstellungen zerlegt werden kann. Diese gilt es nun zu bestimmen. Wir stellen zwei Methoden vor:

- Globale- oder Tensormethode.
- Infinitesimale Methode; (Darst. der Liealgebra $su(2)$; Methode der höchsten Gewichte).

6.4 Globale Methode.

i) Fundamentaldarstellung von $SU(2)$.

Betrachten den VR $\mathcal{D}_{1/2} = \mathbb{C}^2$, mit der Basis $\vec{e}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Skalarprodukt

$$\langle \vec{e}_\pm, \vec{e}_\pm \rangle = 1, \quad \langle \vec{e}_+, \vec{e}_- \rangle = 0.$$

Eine Darstellung, $D_{1/2}$, von $SU(2)$ auf $\mathcal{D}_{1/2}$ ist definiert durch: $U \in SU(2) \longmapsto D_{1/2}(U)$,

$$\mathcal{D}_{1/2}(U)\vec{e}_+ = U_{11}\,\vec{e}_+ + U_{21}\,\vec{e}_-$$
$$\mathcal{D}_{1/2}(U)\vec{e}_- = U_{12}\,\vec{e}_+ + U_{22}\,\vec{e}_- \qquad (1)$$

Für $\xi = \xi_+\vec{e}_+ + \xi_-\vec{e}_- \in \mathcal{D}_{1/2}$ gilt dann

$$\mathcal{D}_{1/2}(U)\xi = \xi_+\,\mathcal{D}_{1/2}(U)\vec{e}_+ + \xi_-\,\mathcal{D}_{1/2}(U)\vec{e}_-$$
$$= (U_{11}\xi_+ + U_{12}\xi_-)\vec{e}_+ + (U_{21}\xi_+ + U_{22}\xi_-)\vec{e}_-, \qquad (2)$$

d.h.

$$\mathcal{D}_{1/2}(U)\begin{pmatrix}\xi_+\\ \xi_-\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\xi_+\\ \xi_-\end{pmatrix}, \ \forall U \in SU(2). \quad (3)$$

ii) <u>Die Darstellung</u> $\mathcal{D}_j$.

Wir definieren einen $(2j+1)$-dimensionalen VR, $\mathcal{D}_j$, als $2j$-faches, <u>symmetrisches</u> Tensorprodukt von $\mathcal{D}_{1/2}$.

Eine Basis in $\mathcal{D}_j$ wird durch die folgenden Vektoren in $\mathcal{D}_{1/2}^{\otimes 2j}$ gegeben:

$$\psi^j_m := (\vec{e}_+)^{\otimes_s (j+m)} \otimes (\vec{e}_-)^{\otimes_s (j-m)}, \qquad (4)$$

$$m = j, j-1, \dots, -j, \quad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots$$

Jeder Vektor $\psi \in \mathcal{D}_j$ hat die Darstellung

$$\psi = \sum_{m=-j}^{j} \xi_m\,\psi^j_m.$$

Eine Darstellung, $\mathcal{D}_j$, von $SU(2)$ auf $\mathfrak{D}_j$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{D}_j(U)\,\psi^j_m := \left(\mathcal{D}_{1/2}(U)\vec{e}_+\right)^{\otimes_s (j+m)} \otimes_s \left(\mathcal{D}_{1/2}(U)\vec{e}_-\right)^{\otimes_s (j-m)}$$

$$= \sum_{m'} \mathcal{D}_j(U)_{m'm}\,\psi^j_{m'}. \qquad (5)$$

Diese Gleichung definiert offensichtlich eine Unterdarstellung der $2j$-fachen Tensorproduktdarstellung von $\mathcal{D}_{1/2}$ auf dem Unterraum der symmetrischen Tensoren vom Range $2j$, $\mathfrak{D}_j$. Es gilt

$$\dim \mathfrak{D}_j = 2j+1. \qquad (6)$$

Die Matrixelemente $\mathcal{D}_j(U)_{m'm}$ in (5) sind relativ komplizierte Polynome in den Matrixelementen von U, die wir hier nicht berechnen wollen. Statt dessen zeigen wir nun, dass $\mathfrak{D}_j$ ein Skalarprodukt trägt, das durch dasjenige auf $\mathfrak{D}_{1/2}$ bestimmt ist: Sei ξ ein Einheitsvektor in $\mathfrak{D}_{1/2}$. Dann ist

$$\psi(\xi) := \xi^{\otimes_s 2j} = \left(\xi_+\vec{e}_+ + \xi_-\vec{e}_-\right)^{\otimes_s 2j} \qquad (7)$$

in $\mathfrak{D}_j$. Das Skalarprodukt von $\psi(\xi)$ mit sich selbst ist durch

$$\langle \psi(\zeta), \psi(\zeta) \rangle = \left(|\zeta_+|^2 + |\zeta_-|^2 \right)^{2j} = \langle \zeta, \zeta \rangle^{2j} = 1 \qquad (8)$$

gegeben. Andererseits ist

$$\psi(\zeta) = \sum_{m=-j}^{j} \binom{2j}{j+m} \zeta_+^{j+m} \zeta_-^{j-m} \psi^j_m . \qquad (9)$$

Vergleich von (8) mit (9) zeigt, dass

$$\langle \psi^j_m, \psi^j_{m'} \rangle = \binom{2j}{j+m}^{-1} \delta_{mm'} \underbrace{\langle \vec{e}_+, \vec{e}_+ \rangle}_{=1}{}^{j+m} \underbrace{\langle \vec{e}_-, \vec{e}_- \rangle}_{=1}{}^{j-m}$$

$$= \binom{2j}{j+m}^{-1} \delta_{mm'} \qquad (10)$$

gesetzt werden muss.

Nach (5) und (7) gilt, dass

$$D_j(U)\psi(\zeta) = \left(\zeta_+ D_{1/2}(U)\vec{e}_+ + \zeta_- D_{1/2}(U)\vec{e}_- \right)^{\otimes_s 2j}$$

$$= \left((U\zeta)_+ \vec{e}_+ + (U\zeta)_- \vec{e}_- \right)^{\otimes_s 2j}$$

$$= \psi(U\zeta) \qquad (11)$$

Nun zeigen wir, dass $D_j(U)$ im durch (10) bestimmten Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_j$ <u>unitär</u> ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass die Vektoren

$$\{ \psi(\zeta) : \zeta \in \mathcal{H}_{1/2}, \ \psi(\zeta) \text{ wie in } (7) \} \qquad (12)$$

ein Erzeugendensystem in $\mathcal{H}_j$ bilden; (Übung!)

Weiter gilt nach (10), dass

$$\langle \psi(\zeta), \psi(\eta) \rangle = \sum_{m=-j}^{j} \binom{2j}{j+m} \left(\bar{\zeta}_+ \eta_+\right)^{j+m} \left(\bar{\zeta}_- \eta_-\right)^{j-m}$$

$$= \left(\langle \zeta, \eta \rangle\right)^{2j} \qquad (13)$$

Wegen (12) genügt es nun zu zeigen, dass

$$\langle D_j(U)\psi(\zeta), D_j(U)\psi(\eta) \rangle = \langle \psi(\zeta), \psi(\eta) \rangle, \qquad (14)$$

$\forall\, \zeta, \eta \in \mathcal{D}_{1/2}$. Auf grund von (11) gilt aber

$$\langle D_j(U)\psi(\zeta), D_j(U)\psi(\eta) \rangle = \langle \psi(U\zeta), \psi(U\eta) \rangle \quad (15)$$

Benützen wir nun (13) und die Unitarität von $D_{1/2}$, so folgt, dass

$$\langle \psi(U\zeta), \psi(U\eta) \rangle = \langle \psi(\zeta), \psi(\eta) \rangle,$$

was zu beweisen war.

Als Nächstes zeigen wir, dass D_j irreduzibel ist. Dies folgt direkt daraus, dass für jedes feste $\zeta \in \mathcal{D}_{1/2}$ $\{U\zeta : U \in SU(2)\}$ die Kugel vom Radius $\langle \zeta, \zeta \rangle^{1/2}$ in $\mathcal{D}_{1/2}$ aufspannt und daher

$$\{D_j(U)\psi(\zeta) = \psi(U\zeta) : U \in SU(2)\}$$

ein Erzeugendensystem in $\mathcal{D}_j$ ist. Daher gibt es für D_j keine invarianten Unterräume in $\mathcal{D}_j$, d.h. D_j

ist <u>irreduzibel.</u> Dasselbe Resultat kann auch durch Betrachten der Charaktere der Darstellungen D_j gezeigt werden:

$$\chi_j(U) = \mathrm{Sp}\, D_j(U), \quad U \in SU(2). \qquad (16)$$

Da $\chi_j(VUV^{-1}) = \chi_j(U)$ (Zyklidität der Spur), können wir benützen, dass jedes $U \in SU(2)$ diagonalisierbar ist:

$$U = V \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}}_{\equiv U(\alpha)} V^{-1}, \quad V \in SU(2).$$

Damit gilt, dass $\chi_j(U) = \chi_j(U(\alpha))$; (die Konjugationsklassen in $SU(2)$ werden durch einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ parametrisiert, und $\chi_j(U)$ hängt nur von der Konjugationsklasse ab, in der U liegt). Nun gilt wegen (4) und (5), dass

$$D_j(U(\alpha))\, \psi^j_m = e^{i(j+m)\alpha}\, e^{-i(j-m)\alpha}\, \psi^j_m$$

$$= e^{2im\alpha}\, \psi^j_m. \qquad (17)$$

Daraus folgt mit (16) und (10), dass

$$\chi_j(U(\alpha)) = \sum_{m=-j}^{j} e^{2im\alpha} = \sin(2j+1)\alpha \,/\, \sin\alpha. \qquad (18)$$

Um zu zeigen, dass D_j irreduzibel ist, können wir nun das Kriterium (65) und den Satz (68) des letzten Abschnitts benützen: χ irreduzibel, falls

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\chi(U(\alpha))|^2 \sin^2\alpha \, d\alpha = 1.$$

Also

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\chi_j(U(\alpha))|^2 \sin^2\alpha \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left| e^{i(2j+1)\alpha} - e^{-i(2j+1)\alpha}\right|^2 d\alpha = 1,$$

d.h. D_j ist <u>irreduzibel.</u>

Nun müssen wir fragen, ob wir alle irreduziblen Darstellungen gefunden haben. Nach dem Satz von Peter-Weyl ist dies genau dann der Fall, wann die Funktionen

$$\chi_j(U(\alpha)) = \frac{\sin(2j+1)\alpha}{\sin\alpha}, \quad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \cdots \qquad (19)$$

im L^2-Raum der Klassenfunktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle F, G\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(\alpha)}\, G(\alpha) \sin^2\alpha \, d\alpha \qquad (20)$$

<u>vollständig</u> sind. Da

$$\sigma_2\, U(\alpha)\, \sigma_2 = \sigma_2 \left(\cos\alpha\, \mathbb{1} + i \sin\alpha\, \sigma_3\right) \sigma_2$$

$$= \cos\alpha\, \mathbb{1} - i\sin\alpha\, \sigma_3$$

$$= U(-\alpha), \qquad \sigma_2 \in SU(2),$$

gilt für <u>jede</u> Klassenfunktion F, dass

$$F(\alpha) = F(-\alpha), \tag{21}$$

d.h. F ist gerade. Daher hat F eine Fourierreihe der Form

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha},$$

(Beweis durch Induktion), und mit (20) gilt, dass

$$\langle F, G \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \gamma_n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(n\alpha)|^2 d\alpha$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \gamma_n ,$$

für $G = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}$. Laut (19) gilt aber

$$\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha} = \chi_{\frac{n-1}{2}}\left(U(\alpha)\right), \tag{22}$$

und damit ist der Beweis der Vollständigkeit der Charaktere χ_j beendet.

iii) <u>Diskussion der Darstellungen</u> D_j :

j bezeichnet den Spin, m die z-Komponente des Spins, die man auch magnetische Quantenzahl nennt.

$j=0$: Triviale Darstellung von $SU(2)$, $\chi_0(U(\alpha))=1$

$\Leftrightarrow$ spinlose (skalare) Teilchen.

$j=1/2$: Fundamentaldarstellung von $SU(2)$,

$$\chi_{1/2}(U(\alpha)) = \sin 2\alpha / \sin\alpha = 2\cos\alpha$$

$\Leftrightarrow$ Teilchen mit Spin ½, e.g. Elektron, Proton, Neutron, Quark.

$j=1$: Spin-1 Darstellung von $SU(2)$ = Fundamentaldarstellung von $SO(3)$ ($\mathcal{D}_1 \simeq \mathbb{R}^3$).

$\Leftrightarrow$ Massive Teilchen mit Spin 1, e.g. $W_\pm$- und Z-Bosonen.

---

iv) Nun bestimmen wir die von D_j induzierten Darstellungen, dD_j, der Liealgebra $su(2)$.

$$su(2) = \left\{ X \equiv \frac{i}{2}\vec{x}\cdot\vec{\sigma} : \vec{x} = \theta\vec{e} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

$$dD_j(X) = \frac{d}{ds} D_j(\exp sX)\Big|_{s=0}. \qquad (23)$$

$$D_j(\exp sX)\,\psi(\xi) \overset{(11)}{=} \psi((\exp sX)\,\xi)$$

$$\approx \psi\left(\xi + \frac{i}{2}s\,\vec{x}\cdot\vec{\sigma}\,\xi\right), \qquad (24)$$

für $|s|$ klein.

Für explizite Rechnungen ist es praktisch, die Basiselemente ψ^j_m zu normieren. Wir definieren

$$e^j_m := \sqrt{\binom{2j}{j+m}}\, \psi^j_m \,. \tag{25}$$

Dann gilt nach (10), dass

$$\langle e^j_m , e^{j'}_{m'} \rangle = \delta^{jj'} \delta_{mm'} \,. \tag{26}$$

Benützen wir die Definition der Drehimpulsoperatoren

$$\vec{x} \cdot \vec{J}^{(j)} = i\hbar\, d\, D_j \left(\frac{i}{2} \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \right) \tag{27}$$

so finden wir aus (24) durch Entwicklung nach Potenzen von ξ_+ und ξ_- und Vergleich, dass

$$\vec{x} \cdot \vec{J}^{(j)} e^j_m = \hbar \Big\{ m x_3 e^j_m + \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\, \frac{x_1 - i x_2}{2} e^j_{m+1} + \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, \frac{x_1 + i x_2}{2}\, e^j_{m-1} \Big\} . \tag{28}$$

Also

$$\left. \begin{aligned} J_3^{(j)} e^j_m &= \hbar m\, e^j_m \\ J_+^{(j)} e^j_m &= \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\, e^j_{m+1} \\ J_-^{(j)} e^j_m &= \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, e^j_{m-1} , \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

wo

$$J_\pm := J_1 \pm i J_2 \,.$$