Übung 3.1 Volumenform

Sei M eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik $g = (g_{ik}(\cdot))$. Zeige, dass $dvol = \sqrt{|g(x)|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ eine Volumenform auf M ($n = \dim M$) ist.
Hinweis: In lokalen Koordinaten definieren wir $g(x) := \det(g_{ik}(x))$. Da g nicht entartet ist, gilt $g(x) \neq 0 \ \forall x \in M$. Sei der Diffeomorphismus $\varphi : M \to M$ eine Isometrie, d.h. $\varphi^* g = g$. Zeige dann, dass $dvol$ invariant ist, unter der Koordinatentransformation $x = \varphi(\tilde{x})$ ($x = (x^1, ..., x^n), \tilde{x} = (\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n)$).
Bemerkung: Man kann zeigen, dass (α ist eine $k-$Form) $*\varphi^*(\alpha) = \varphi^*(*\alpha)$ und $\varphi^*\delta\alpha = \delta\varphi^*\alpha$ gilt, mit $*$, der Hodge Operator, und δ, das Kodifferential.

Übung 3.2 Helmholtz-Hodge Zerlegung

Sei $\vec{A}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{E}^3$. Dann existieren eine Funktion ϕ und Vektorfelder $\vec{V}$ und $\vec{W}$ auf $\mathbb{E}^3$, so dass

$$\vec{A} = -grad\ \phi + curl\ \vec{V} + \vec{W},$$

mit $\Delta\vec{W} = 0$ (d.h. $\vec{W}$ harmonisch) und

$$grad\ \phi \perp curl\ \vec{V} \quad , \quad curl\ \vec{V} \perp \vec{W} \quad , \quad grad\ \phi \perp \vec{W}.$$

Zeige es !
Hinweis: Dazu, muss man zeigen, dass

$$\begin{aligned} curl\ grad\ \phi &= 0 \\ div\ curl\ \vec{V} &= 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sei a eine $k-$From. Die Hodge Zerlegung gibt

$$a = d\phi + \delta v + w,$$

wo w harmonisch ($\Delta w := (d\delta + \delta d)w = 0$) ist. d ist die äussere Ableitung und δ, das Kodifferential.

Übung 3.3 Laplace-de Rham-Hodge Operator

Der Laplace Operator ist wie folgt definiert $\Delta = d\delta + \delta d$. Zeige, dass $d\Delta = \Delta d$ und $d\delta = \delta d$ gelten, und dass $d\Delta^{-1} = \Delta^{-1} d$ auf $\left(H^k_\Delta(M)\right)^\perp$ gilt.
Bemerkung: Wir definieren den Raum der harmonischen $k-$Formen auf der Mannigfaltigkeit M wie folgt :

$$H^k_\Delta(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) : \Delta\alpha = 0\}.$$

Wir definieren das orthogonale Komplement wie folgt :

$$\left(H^k_\Delta(M)\right)^\perp \cong \Omega^k(M)/H^k_\Delta(M).$$

Übung 3.4 Kanonische Transformationen

Sei die symplektische Mannigfaltigkeit M mit den Darboux Koordinaten $(q^1, p_1, ..., q^n, p_n) \equiv (q, p)$ gegeben und sei $\varphi : M \to M$ ein harmonischer Diffeomorphismus. Herleite die Koordinatentransformation $\varphi : (Q, P) \mapsto (q, p)$, wenn φ eine kanonische Transformation ist.
Hinweis: Eine Abbildung $\varphi : M \to M$ ist kanonisch, wenn $\varphi^* \omega = \omega$, wo ω die geschlossene zwei-From ist (symplektische Struktur von M). In lokalen Koordinaten gilt $\omega = dp \wedge dq$ (Darboux Satz) und dann $\omega = d(pdq)$ (Poincarré Lemma).