Theoretische Physik
Serie 4

Übung 4.1 Poisson Klammer

Sei (M^{2n}, ω^2) eine symplektische Mannigfaltigkeit (mit $dim\ M = 2n$, und ω^2, eine geschlossene zwei-Form). Wir haben die Poisson Klammer zwischen zwei glatten Funktionen $(G, F : M \to \mathbb{R})$ wie folgt definiert :

$$\{F, G\} = -\omega(X_F, X_G),$$

wobei X_F das durch F bestimmte Vektorfeld ist (bzw. X_G durch G).
Zeige, dass für die Poisson Klammer die folgende Eigenschaften gelten :

a) Bilinearität :

$$\{c_1F_1 + c_2F_2, G\} = c_1\{F_1, G\} + c_2\{F_2, G\} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Antisymmetrie :

$$\{F, G\} = -\{G, F\}.$$

c) Produktregel :

$$\{F, HG\} = G\{F, H\} + H\{F, G\}.$$

d) Jacobi-Identität :

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

e) Invarianz : Sei die Koordinatentransformation $\varphi : (p, q) \mapsto (P, Q)$, die durch die kanonische Abbildung φ erstellt wird. Dann gilt

$$\{F, G\}_{p,q} = \{F, G\}_{P,Q} = \{F, G\}.$$

f) In den lokalen Koordinaten (p, q) gilt :

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Hinweis: (Siehe Arnold's Mathematical Methods of Classical Mechanics). Für alle Tangentenvektoren zu M im Punkt x, $\xi \in T_xM$, verknüpfen wir eine eins-Form $\omega^1(\xi)$ über T_xM durch

$$\omega^1_\xi(\eta) = \omega^2(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in T_xM.$$

Man kann zeigen, dass die Abbildung $J : T^*_xM \to T_xM$ ein Isomorphismus ist. Sei H eine Funktion über M. Also ist dH eine (eins-) Differentialform über M, und für alle Punkte $x \in M$ gibt es einen durch H bestimmten Tangentenvektor zu M. Dann bekommen wir das Vektorfeld JdH.

g) Fundamentale Poisson Klammer (mit den lokalen Koordinaten (p,q)) :

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{k,l}\ ,\ \{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0.$$

Übung 4.2 Erhaltungsgrössen

Sei H die Hamilton Funktion eines mechanischen Systems mit Phasenraum (Γ, ω) (symplektische Mannigfaltigkeit), und sei $\{\phi_t\}_{t\in I}$ der von X_H erzeugte Fluss auf Γ. Sei F eine Funktion auf Γ und $\{\psi_s\}_{s\in J}$ der von X_F erzeugte Fluss auf Γ.

a) Zeige, dass
$$\{F,H\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\phi_t^* F}{dt}(t=0) = 0 \ \ \forall F.$$

b) Die Funktion F ist eine Erhaltungsgrösse für $\{\phi_t\}_{t\in I}$ wenn $\phi_t^* F = F,\ \forall t \in I$. Zeige, dass dies gilt wenn $\{F,H\} = 0$. Zeige auch, dass in diesem Fall $\{\psi_s\}_{s\in J}$ eine einparametrige Gruppe von Symmetrien des Systems ist, d.h. $\psi_s^* H = H\ \forall s \in J$.

Übung 4.3 Das Kepler Problem

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von zwei Massenpunkten, m_1 und m_2, mit Zentralkräften. Die Bewegungsgleichungen sind durch

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\boldsymbol{q}}_1 &= \boldsymbol{F}_{12}, \\ m_2 \ddot{\boldsymbol{q}}_2 &= \boldsymbol{F}_{21}, \\ \boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} &= -\frac{\partial U(|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|)}{\partial \boldsymbol{q}_1}, \end{aligned}$$

gegeben. Diese entsprechen einen 12−Dimensionen Phasenraum. Die dazugehörige Hamilton Funktion lautet :

$$H(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m_2} + U(|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|).$$

(Das System ist autonom, d.h. $\partial H/\partial t = 0$.)
Wir führen jetzt Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{m_1 \boldsymbol{q}_1 + m_2 \boldsymbol{q}_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2,$$
$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 \quad , \quad \boldsymbol{p} = \frac{m_2 \boldsymbol{p}_1 - m_1 \boldsymbol{p}_2}{m_1 + m_2}.$$

(Diese Transformation ist kanonisch). Die Hamilton Funktion lautet nun :

$$K(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}) = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + H_{rel}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}),$$

mit $M = m_1 + m_2$ und

$$H_{rel}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U(|\boldsymbol{q}|),$$

wobei $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ die so gennante reduzierte Masse ist.

Man zeigt leicht, dass die kanonischen Gleichungen zu K durch

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \frac{\boldsymbol{P}}{M} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{P}} = 0,$$
$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H_{rel}}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H_{rel}}{\partial \boldsymbol{q}} = -\frac{\partial U(|\boldsymbol{q}|)}{\partial \boldsymbol{q}},$$

gegeben sind. Bemerke, dass die zwei ersten Gleichungen dem Schwerpunktssatz und dem Impulssatz entsprechen.

Nun betrachten wir das Zentralfeldproblem, d.h. wir nehmen $M \gg m$ an. Mit anderen Worten beschränken wir uns auf das System $H = H_{rel} = \boldsymbol{p}^2/2m + U(r)$, d.h. den Massenpunkt (mit Masse m) im Zentralfeld $U(r)$ ($r \equiv |\boldsymbol{q}|$). Das ist das sogenannte Kepler Problem. Der Phasenraum ist jetzt nur $6-$dimensional. Wir wollen jetzt die Hamilton Jacobi Methode.

Zuerst lösen wir die Hamilton Jacobi Gleichung des Systems.

a) Drücke die Hamilton Funktion in sphärischen Koordinaten $q \equiv (r, \theta, \phi)$ aus. Dann setze die folgende Variablen ein :

$$p_r = m\dot{r} \ , \ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \ , \ p_\phi = mr^2 \sin^2\theta\dot{\phi},$$

(p sind konjugierte Variable zu q und (p, q) sind kanonische Koordinaten des Systems). Wie lautet die verkürzte Hamilton-Jacobische Gleichung?

Hinweis: Man wählt $\partial S(P^{(0)}, q)/\partial q^i = p_i$ (S, die erzeugende Funktion) und $K(P^{(0)}) = P_1 = E$ (die gesamte Energie des Systems) mit den folgenden Konstanten der Bewegung $P^{(0)} := (P_1, P_2, P_3)(t = t_0)$.

b) Wir wollen diese Gleichung nach der erzeugenden Funktion $S(P, q)$ integrieren. Dazu setzt man den Separationsansatz ein :

$$S(r, \theta, \phi) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi).$$

(Die Variablen sind "separabel"). Gib p_r, p_θ und p_ϕ als Funktionen von den Konstanten $P_1 \equiv P_r = E$, $P_2 \equiv P_\theta = \sqrt{(dS_\theta/d\theta)^2 + (P_2/\sin\theta)^2}$, $P_3 \equiv P_\phi = dS_\phi/d\phi$, von $q = (r, \theta, \phi)$ und von $U(r)$. Dann gib einen Ausdruck für das gesamte Integral $S(E, P_\theta, P_\phi, r, \theta, \phi)$ an (Integralform).

c) Gib den Ausdruck der übrigen Variablen

$$Q^i(t) = \Omega^i \ (t - t_0) + Q^{i(0)} = \frac{\partial S}{\partial P_i}(P, q),$$

an ($\Omega^i = \partial K(P^{(0)})/\partial P_i$, $Q^{i(0)} = Q^i(t_0)$).

Wir wollen jetzt die Winkel- und Wirkungsvariablen, $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{I})$, einführen. Dazu wird eine kanonische Transformation $(q, p) \mapsto (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{I})$ bestimmt, die sich wie folgt anhand der erzeugenden Funktion $\tilde{S}(q, \boldsymbol{I}) := S(q, P)$ konstruieren lässt :

$$p = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}(q, \boldsymbol{I}) \quad , \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \boldsymbol{I}}(q, \boldsymbol{I}) \ ,$$
$$K\left(\frac{\partial \tilde{S}(q, \boldsymbol{I})}{\partial q}, q\right) = H(\boldsymbol{I}),$$

wobei

$$I_j(P) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha dq^\alpha.$$

d) Gib die Ausdrücke (Integrale) der Wirkungsvariablen des Systems an : I_r, I_θ und I_φ (als Funktionen von (r, θ, φ), (E, P_θ, P_ϕ) und $U(r)$).

Wir betrachten nur $E < 0$ (gebundene Bahnen) für das Kepler-Potential $U(r) = -\frac{k}{r}$ $(k \geq 0)$.

e) Berechne die Integrale in d) (Wirkungsvariablen). Man erhält

$$\begin{aligned} I_\phi &= P_\phi, \\ I_\theta &= P_\theta - P_\phi, \\ I_r &= \frac{mk}{\sqrt{2m|E|}} - P_\theta. \end{aligned}$$

Dann ist die Energie des Systems durch

$$E(\boldsymbol{I}) = -\frac{mk^2}{2(I_r + I_\theta + I_\phi)^2},$$

gegeben. Dies ist die neue Hamiltonfunktion $E(\boldsymbol{I}) \equiv H(\boldsymbol{I}) := K(P(\boldsymbol{I}))$.

e) Berechne die Frequenzen

$$\omega_i(\boldsymbol{I}) = \frac{\partial H(\boldsymbol{I})}{\partial I_i},$$

und zeige, dass das dritte Keplersche Gesetz, $T \propto E^{-3/2} \propto a^{3/2}$ (a ist die grosse Halbachse einer Ellipse), für die Periode $T := 2\pi/\omega$, gilt ($\omega = \omega_i$).

f) Gib die Winkelvariablen an (Integralform). Drücke dazu $S(q, P)$ als Funktion von (r, θ, ϕ) und (I_r, I_θ, I_ϕ) aus (benütze das Ergebnis von b)). Berechne die Integrale und zeige, dass die Umlaufbahnen Ellipsen sind.