Theoretische Physik
Serie 5

FS 2011
Prof. J. Fröhlich

Übung 5.1 Laplace Operator

Zeige mit Hilfe der Greenschen Setzes, dass

$$-\Delta_x \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{1}$$

Übung 5.2 Elektrostatisches Dipol

a) Bestimme das elektrostatische Potential ϕ eines elektrischen Dipols : wir haben die Ladung $-q$ im Punkt $\boldsymbol{x}$ und die Ladung q im Punkt $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}$. Dann betrachte den Grenzübergang : $|\boldsymbol{d}| \to 0$ mit $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{x}$ fest.

b) Zeige, dass das Potential ϕ einer Dipolschicht mit Flächendipoldichte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ an deren Grenzfläche S unstetig ist, d.h. dass

$$\phi(\boldsymbol{x}+0^+\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})) - \phi(\boldsymbol{x}-0^+\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in S. \tag{2}$$

Übung 5.3 Greensche Funktionen

a) Bestimme die Greensche Funktion für $-\Delta$ in Gegenwart einer ideal leitenden Kugel:

$$-\Delta G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{x}$ der Ortsvektor einer Einheitsladung ist und $\boldsymbol{y}$ ist der Punkt, wo man das Potential bestimmt.

Hinweis: Dazu benützt man die Methode der Bildlädungen.

b) Sei der Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit dem Rand $\partial\Omega$. Man betrachte die Greensche Funktion :

$$G_\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : -\Delta G_\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega, \tag{4}$$

mit den Dirichlet Randbedingungen

$$\lim_{\boldsymbol{y}\to\partial\Omega} G_\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0. \tag{5}$$

Löse

$$-\Delta\phi = 0, \tag{6}$$

mit

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}\in S\subset\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{y}), \tag{7}$$

und

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}\in\partial\Omega\setminus S} \boldsymbol{n}_{\vec{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{z}). \tag{8}$$

c) Maximum Prinzip für harmonische Funktionen: Sei

$$-\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{auf } \Omega. \tag{9}$$

Zeige, dass es keinen Punkt $\boldsymbol{x}\in\Omega$ existiert, der lokale Minima oder Maxima ist.

Hinweis: Benutze den Green-Satz.

Übung 5.4

Beweise die Gleichung (4.40).

Übung 5.5 Hall-Effekt

Einführe das Hall-Effekt.