12. Bewegte Punktladungen, Strahlungsdämpfung.

Betrachten ein Punktteilchen mit Ladung e. Hat zeitartige Weltline $y(\tau) = (y^0(\tau), \vec{y}(\tau)) \in M$, τ = Eigenzeit. Dieses Teilchen erzeugt einen Viererstrom:

$$j^\mu(x) = e\, u^\mu(t)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}(t)), \quad (12.1)$$

$u^\mu = \frac{dy^\mu}{d\tau}$ = μ-Komp. der Vierergeschw.; siehe Formel (8.25)! Nach (5.22) und (5.23) finden wir für das retardierte Vektorpotential:

$$A^\mu(x) = e\int d\tau\, D_{ret.}(x-y(\tau))\,u^\mu(\tau), \qquad (12.2)$$

siehe Rechnung auf p. 116, oben!

Setzen wir die Formel (5.10),

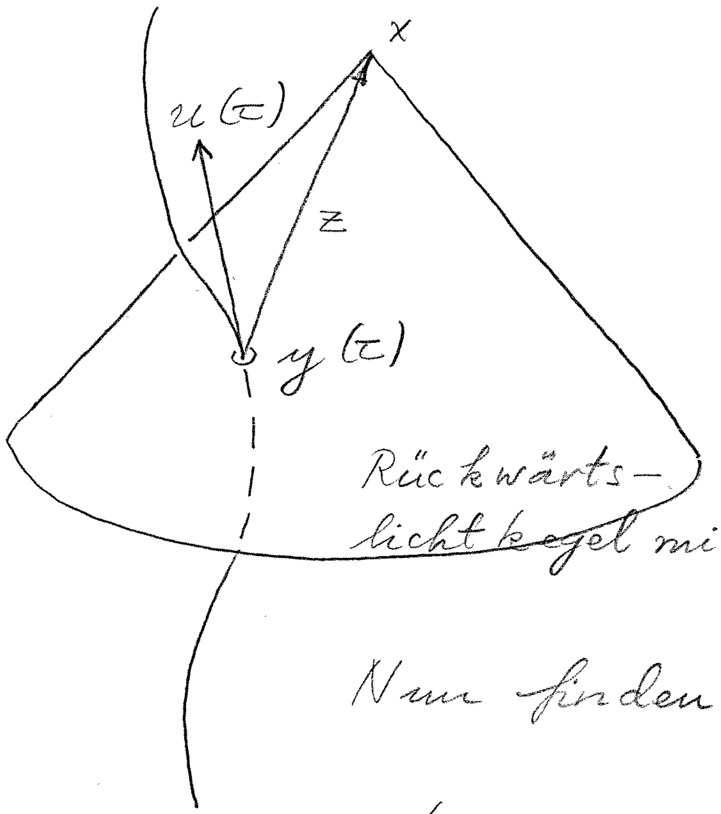
$$D_{ret.}(x) = \frac{1}{4\pi r}\,\delta(x^0 - r), \quad r = |\vec{x}|, \qquad (12.3)$$

in (12.2) ein, so gelangen wir zum Ausdruck

$$A^\mu(x) = e \int d\tau\, \frac{u^\mu(\tau)}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{y}(\tau)|}\,\delta\Big(\underbrace{x^0 - y^0(\tau) - |\vec{x}-\vec{y}(\tau)|}_{\equiv\, \varphi(\tau)}\Big) \qquad (12.4)$$

Nullstellen von $\varphi(\tau)$:

Sei $z := x - y(\tau)$. $\varphi(\tau) = 0 \iff z$ lichtartig



$\iff z\cdot z = 0$,

oder

$$x^0 - y^0(\tau) = |\vec{x} - \vec{y}(\tau)|. \qquad (12.5)$$

Rückwärtslichtkegel mit Apex in x.

Nun finden wir aus Def. von $\varphi(\tau)$

$$\varphi'(\tau) = -u^0(\tau) + \frac{(\vec{x}-\vec{y}(\tau))\cdot\vec{u}(\tau)}{|\vec{x}-\vec{y}(\tau)|}$$

$$\overset{(12.5)}{=} -\frac{z\cdot u}{|\vec{x}-\vec{y}(\tau)|} \qquad (12.6)$$

Allgemein gilt, dass

$$\int d\tau \, g(\tau)\, \delta(\varphi(\tau)) = \sum_{i:\varphi(\tau_i)=0} \frac{g(\tau_i)}{|\varphi'(\tau_i)|}. \qquad (12.7)$$

Aus der Figur ersehen wir, dass für vorgeg. x $\varphi(\tau)$ genau eine Nullstelle hat, wenn $\varphi(\tau)$ wie in (12.4) gewählt wird. Setzen wir nun (12.7) in (12.4) ein, so finden wir mit (12.6), dass

$$A^\mu(x) = \frac{e\, u^\mu(\tau)}{4\pi\, z(\tau)\cdot u(\tau)}, \qquad (12.8)$$

wo $z(\tau) = x - y(\tau)$ und τ die Nullstelle von

$$\varphi(\tau) = x^0 - y^0(\tau) - |\vec{x} - \vec{y}(\tau)|$$

ist. Der Ausdruck (12.8) für $A^\mu(x)$ heisst Liénard-Wiechert Potential.

Nun berechnen wir aus (12.8) den Feldtensor:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (12.9)$$

Dazu müssen wir $\tau = \tau(x)$ und dessen erste Ableitungen nach x kennen.

Diese ergeben sich aus der Gl. $z \cdot z = 0$:

$$0 = \partial_\mu z^\nu \cdot z_\nu = 2\left(\delta_\mu^\nu - u^\nu \frac{\partial\tau(x)}{\partial x^\mu}\right) z_\nu \,. \quad (12.10)$$

Daraus folgt sofort, dass

$$\frac{\partial\tau(x)}{\partial x^\mu} = \frac{z_\mu}{z \cdot u} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(\tau) = \frac{z_\mu}{z \cdot u} \cdot \frac{d}{d\tau} f(\tau) \quad (12.11)$$

Mit (12.8) folgt nun:

$$4\pi\, \partial_\mu A_\nu = \frac{z_\mu}{z \cdot u} \cdot \frac{d}{d\tau} \frac{e\, u_\nu(\tau)}{z(\tau) \cdot u(\tau)} - \frac{e\, u_\mu(\tau) u_\nu(\tau)}{(z(\tau) \cdot u(\tau))^2} \quad (12.12)$$

Der 2. Term auf der R.S. ist symmetrisch in μ und ν und trägt daher nicht zu $F_{\mu\nu}$ bei!

Man sieht leicht, dass

$$\frac{d}{d\tau} z(\tau) \cdot u(\tau) = -\underbrace{u(\tau) \cdot u(\tau)} + z(\tau) \cdot w(\tau)$$

$$= - \quad c^2 \quad + z(\tau) \cdot w(\tau), \quad (12.13)$$

wo $w(\tau) := \dfrac{du(\tau)}{d\tau}$. Gln. (12.12) und (12.13) setzen wir nun in (12.9) ein und finden:

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{(z \cdot u)^3} \Big[(c^2 - z \cdot w)(z_\mu u_\nu - z_\nu u_\mu) + z \cdot u\, (z_\mu w_\nu - z_\nu w_\mu) \Big].} \quad (12.14)$$

Dreidimensionale Formeln für $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

Setzen

$$\left.\begin{aligned} z = r(1, \vec{n}), \quad r = |\vec{z}| = z^0; \\ \vec{n} = \frac{\vec{z}}{r}, \quad |\vec{n}| = 1. \\ \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \dot{\vec{\beta}} = \frac{d\vec{\beta}}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (12.15)$$

Wir zeigen, dass

$$\vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E} \qquad (12.16)$$

Aus (12.14) sehen wir, dass

$$F_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu, \quad a = \frac{z}{r} = (1, \vec{n}). \qquad (12.17)$$

Nun ist $E_i = F_{0i}$, also

$$\vec{E} = -\vec{b} + b^0 \vec{n}, \qquad (12.18)$$

und $B_i = \varepsilon_{ijk} F_{jk}$, also

$$\vec{B} = -\vec{n} \wedge \vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{E} \qquad (12.19)$$

Es genügt also (12.18) weiter auszurechnen!

Dazu benützen wir:

$$u = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(1,\vec{\beta}\,), \quad w = \frac{c}{1-\beta^2}\,(0,\dot{\vec{\beta}}\,) + \frac{\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}}{(1-\beta^2)^{3/2}}\,u \qquad (12.20)$$

Da Komponenten von $w \parallel u$ nicht zu $F_{\mu\nu}$ beitragen, kann man den letzten Term weglassen.

Man hat

$$\left.\begin{aligned} z\cdot u &= \frac{rc}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\,), \\ z\cdot w &= -\frac{rc}{1-\beta^2}\,\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}} \end{aligned}\right\} \qquad (12.21)$$

Mit (12.14) finden wir

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi}\,\frac{rc^3}{(z\cdot u)^3\sqrt{1-\beta^2}}\,(\vec{n}-\vec{\beta}\,)$$

$$+ \frac{e}{4\pi}\,\frac{(rc)^2}{(z\cdot u)^3(1-\beta^2)^{3/2}}\left[(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,)(\vec{n}-\vec{\beta}\,)-(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\,)\,\dot{\vec{\beta}}\,\right] \qquad (12.22)$$

und nach Einsetzen von (12.21):

$$\boxed{\vec{E} = \frac{e\,(1-\beta^2)}{4\pi r^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\,)^3}\,(\vec{n}-\vec{\beta}\,) + \frac{e}{4\pi rc\,(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\,)^3}\,\vec{n}\wedge\left[(\vec{n}-\vec{\beta}\,)\wedge\dot{\vec{\beta}}\,\right]} \qquad (12.23)$$

und

$$\boxed{\vec{B} = \vec{n}\wedge\vec{E}} \qquad (12.24)$$

Diskussion.

$\dot{\vec{\beta}} = 0 \Rightarrow$ Nur Terme $\propto \frac{1}{r^2}$ in $\vec{E}$ & $\vec{B}$

$\Rightarrow$ Keine Abstrahlung e.m. Feldenergie von gleichförmig bewegten Punktteilchen!

Terme $O(\frac{1}{r})$ sind proportional zu $\dot{\vec{\beta}}$.

In $O(\frac{1}{r})$ ist $\vec{E} \perp \vec{n}$; (siehe (12.23)).

$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ orthogonales Dreibein (wie bei ebener Welle).

Abstrahlung e.m. Feldenergie von beschleunigten Punktladungen.

Ausgestrahlte Leistung:

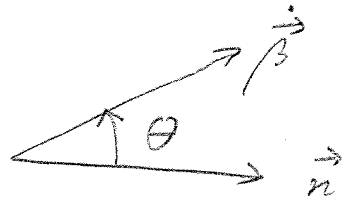
$W(t) =$ Energiestrom zur Zeit $t + \frac{r}{c}$ durch Kugeloberfläche vom Radius r um $\vec{y}(t)$.

Für $r \to \infty$ wird $W(t)$ unabhängig von r

Für $\vec{\beta} = 0$ folgt aus (12.23), (12.24):

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{B} = \left(\frac{e}{4\pi r c}\right)^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2\theta \, \vec{n} \qquad (12.25)$$

Fig. 1:



Daraus findet man für W:

$$W = \lim_{r\to\infty} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, |\vec{S}(r,\theta,\varphi)|$$

$$= \frac{e^2}{(4\pi)^2 c^2} |\dot{\vec{\beta}}|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{e^2}{6\pi c^2} |\dot{\vec{\beta}}|^2, \qquad (12.26)$$

(denn $\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$!).

Für $\vec{\beta} \neq 0$ kann man die Formel mit Hilfe einer <u>Lorentztransformation</u> finden:

$(W^\mu(t)dt) =$ c × abgestrahlter Viererimpuls im Zeitintervall $[t, t+dt]$, (12.27)

mit

$$W^0(t) = W.$$

Im Ruhesystem des Teilchens ist $\vec{\beta} = 0$ und

$(W^\mu) = (W, 0, 0, 0)$, W wie in (12.26)!

Ansatz für W^μ:

$$W^\mu d\tau = -\frac{e^2}{6\pi c^5}(w\cdot w)u^\mu d\tau \,, \quad w = \frac{du}{d\tau} \quad (12.2$$

Diese Gl. ist eine Gl. zwischen Vierervektoren, gilt also in jedem Inertialsystem. Aus (12.20) folgt.

$$\frac{w}{c} = (1-\beta^2)^{-1}(0,\dot{\vec\beta}) + (1-\beta^2)^{-2}\,\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta}\,(1,\vec\beta)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c^2}w\cdot w = (1-\beta^2)^{-2}\dot{\vec\beta}\cdot\dot{\vec\beta} + 2(1-\beta^2)^{-3}(\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta})^2$$
$$-(1-\beta^2)^{-3}(\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta})^2$$
$$= (1-\beta^2)^{-3}\left[\dot{\vec\beta}\cdot\dot{\vec\beta} - \left(\beta^2\dot{\vec\beta}\cdot\dot{\vec\beta} - (\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta})^2\right)\right]$$
$$= (1-\beta^2)^{-3}\left[\dot{\vec\beta}\cdot\dot{\vec\beta} - (\vec\beta\wedge\dot{\vec\beta})^2\right]$$

Nun gilt $u^0 d\tau = c\,dt$, und daher

$$W^0 = \frac{e^2}{6\pi c^2}(1-\beta^2)^{-3}\left[\dot{\vec\beta}\cdot\dot{\vec\beta} - (\vec\beta\wedge\dot{\vec\beta})^2\right] \quad (12.29)$$

Für $\vec\beta = 0$, fällt also $W^0 = W$ mit (12.26) zusammen. Daher gilt (12.28) allgemein!

Anwendung: Strahlungsverluste in Beschleunigern

(1) Linearbeschleuniger // x-Achse.

Teilchen der Ruhemasse m und Ladung e werden beschleunigt. $\Rightarrow \quad p \cdot p = (mc)^2 = \text{const.}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp^0}{d\tau} = \beta \, \frac{dp^1}{d\tau} \quad , \quad (p^2 = p^3 = 0) \quad (12.30)$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{dp}{d\tau} \cdot \frac{dp}{d\tau}\right) = (1-\beta^2)\left(\frac{dp^1}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dp^1}{dt}\right)^2$$

Aus (12.28) folgt mit $\frac{dp}{d\tau} = m \frac{du}{d\tau} = m w$:

$$W^0 = -\frac{e^2 c}{6\pi (mc^2)^2} \, \frac{dp}{d\tau} \cdot \frac{dp}{d\tau} = \frac{e^2 c}{6\pi (mc^2)^2} \left(\frac{dp^1}{dt}\right)^2 \quad (12.31)$$

Wegen (12.30) ist $\left(\text{mit } \beta = \frac{v}{c} \, ; \, E = c p^0\right)$

$$\frac{dp^1}{dt} = \frac{1}{v} \, \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} ,$$

wo $\frac{dE}{dx}$ die Zunahme der kinetischen Energie pro Längeneinheit ist. Damit finden wir aus (12.31)

$$\frac{W^0}{dE/dt} = \frac{e^2}{6\pi (mc^2)^2} \, \frac{c}{v} \, \frac{dE}{dx} \xrightarrow[v \to c]{} \frac{e^2}{6\pi (mc^2)^2} \, \frac{dE}{dx} \quad (12.32)$$

$\Rightarrow$ Strahlungsverluste $\propto \dfrac{1}{(mc^2)^2}$!

Für ein Elektron ist $mc^2 \simeq 0.5$ MeV, $e^2/mc^2 \simeq 10^{-15}$ m. Bei einer Energiezunahme von 10 MeV/m ist

$$W = 10^{-14} \frac{dE}{dt}$$

$\Rightarrow$ Strahlungsverluste <u>unbedeutend</u>!

(2) <u>Kreisbeschleuniger.</u>

Tangentialbeschl. $\ll$ Zentrifugalbeschl., im relativistischen Bereich.

$\Rightarrow$ $|\dot{\vec{\beta}}| = \beta\omega$, $\omega = \dfrac{c\beta}{r}$, r = Radius des Beschleunigers. Aus (12.29) folgt dann:

$$W^0 = \frac{e^2}{6\pi c}(1-\beta^2)^{-2}\beta^2\omega^2 \qquad (12.33)$$

Umlaufszeit $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Energieverlust pro Umlauf: $\Delta E = W^0 T$.

Damit folgt aus (12.33):

$$\Delta E = \frac{e^2}{3c}\left(1-\beta^2\right)^{-2}\frac{c\beta^3}{r}$$

$$= \frac{e^2}{3r}\left(1-\beta^2\right)^{-2}\beta^3 \underset{\substack{\uparrow\\ v\approx c}}{\approx} \frac{e^2}{3r}\left(1-\beta^2\right)^{-2} \quad (12.3$$

Mit $E = mc^2(1-\beta^2)^{-1/2}$ folgt daraus

$$\boxed{\frac{\Delta E}{mc^2} = \frac{e^2}{3r\,mc^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4} \qquad (12.35)$$

Grössenordnungen für Elektron-Synchrotron:

$E = 10\,\mathrm{GeV} \approx 10^4\,mc^2, \quad r = 10\,\mathrm{m}$

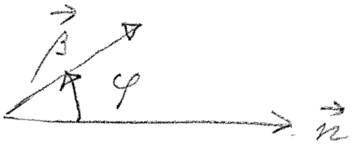
$$\Longrightarrow \quad \Delta E \approx mc^2 \approx 1\,\mathrm{MeV}.$$

$\rightarrow$ Beträchtliche Strahlungsverluste!

Strahlungscharakteristik im relativistischen Bereich.

Gehen auf die Formeln (12.23), (12.24) für $\vec{E}, \vec{B}$ und die Definition von $\vec{S}$ (Poynting Vektor) zurück: Für die <u>Winkelabhängigkeit</u> ergibt sich, dass

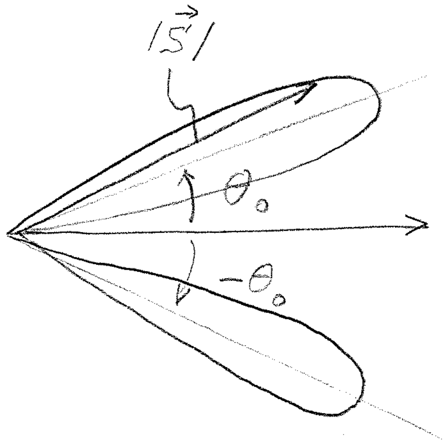
$$\vec{S} \propto \left(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right)^{-6}. \qquad (12.36)$$

Fig. 2: 

$$(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^{-6} = (1-\beta\cos\varphi)^{-6}$$

<u>Spezialfall:</u> $\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\beta}$, d.h. $\varphi = \theta$; (siehe Fig. 1 und Fig. 2). Dann folgt aus (12.25) und (12.23), (12.24), dass

$$|\vec{S}| \simeq \frac{1}{r^2}\,\frac{e^2}{16\pi^2 c}\,|\dot{\beta}|^2\,\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6} \qquad (12.37)$$



Polardiagramm von $|\vec{S}|$

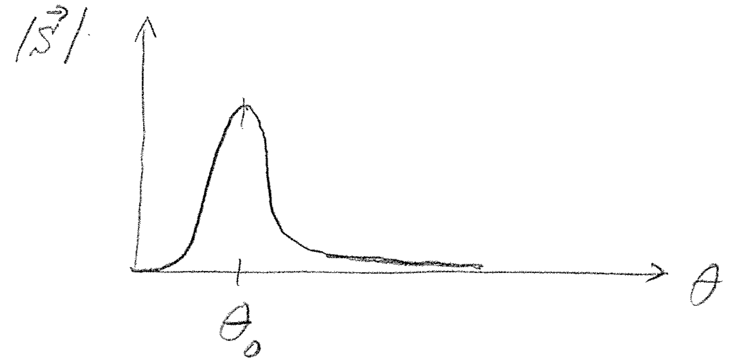
Da Maxima von $|\vec{S}|$ bei kleinen Winkeln auftreten, können wir in θ entwickeln:

$$\gamma^{-2} := 1-\beta^2 = (1+\beta)(1-\beta) \approx 2(1-\beta), \quad \text{für } \beta \approx 1;$$

und

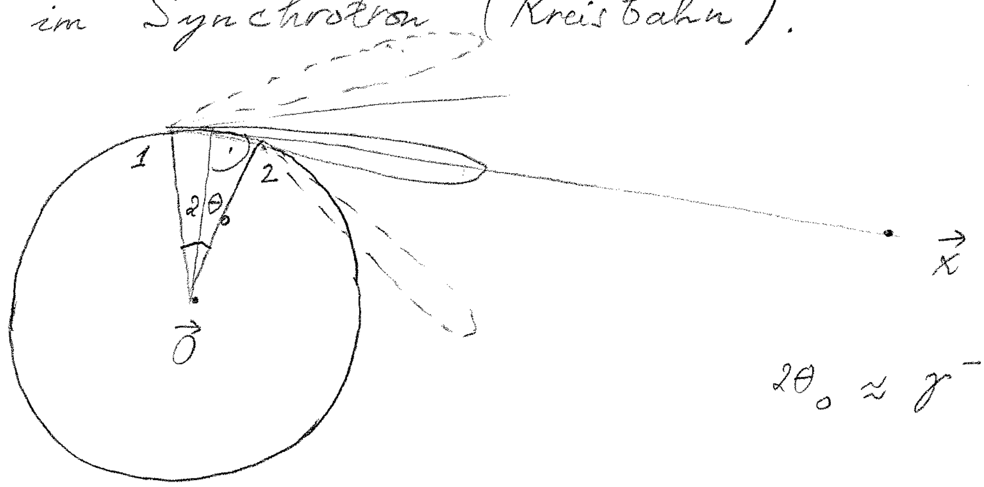
$$1-\beta\cos\theta \approx 1-\beta(1-\theta^2/2) \approx \frac{1-\beta^2}{2}\left[1+\frac{\theta^2}{1-\beta^2}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad |\vec{S}| \propto \frac{1}{r^2}\,\frac{(\gamma\theta)^2}{(1+(\gamma\theta)^2)^6}, \\ \text{für kleine } \theta. \end{aligned}\right\} \qquad (12.38)$$



Maximum von $|\vec{S}|$ bei $\theta_0 \approx \gamma^{-1}$.

Ähnliches gilt auch, wenn $\dot{\vec{\beta}} \nparallel \vec{\beta}$. Dann hängt Winkelverteilung von $|\vec{S}|$ auch vom Azimut $\sphericalangle$ um $\vec{\beta}$ ab. Betrachten ein Elektron im Synchrotron (Kreisbahn).



$2\theta_0 \approx \gamma^{-1}$

ω_0 : Winkelgeschwindigkeit des Elektrons.

Zur Strahlung, die in $\vec{x}$ beobachtet wird, tragen nur die Punkte der Bahnkurve zwischen 1 und 2 wesentlich bei.

$$\Rightarrow \text{Aussendedauer} \approx \frac{\gamma^{-1}}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 \gamma} = \frac{\Delta y^0}{c}, \qquad (12.39)$$

wo $(y_0(\tau), \vec{y}(\tau))$ die Weltlinie des Elektrons ist; τ = Eigenzeit.

Der Puls möge beim Beobachter in $\vec{x}$ im Zeitintervall $[t, t + \frac{\Delta x^0}{c}]$ eintreffen. Nun gilt:

$$\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} \approx \frac{dy^0}{d\tau} \cdot \frac{\Delta \tau}{\Delta x^0}$$

Aus (12.11) haben wir, dass $\frac{\Delta \tau}{\Delta x^0} \approx \frac{z^0}{z \cdot u}$, d.h., mit $z = r(1, \vec{n})$, $\frac{\Delta \tau}{\Delta x^0} = \frac{r}{r(u^0 - \vec{n} \cdot \vec{u})}$. Damit folgt, dass

$$\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} \approx u^0 \frac{\Delta \tau}{\Delta x^0} = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \approx \gamma^2 .$$

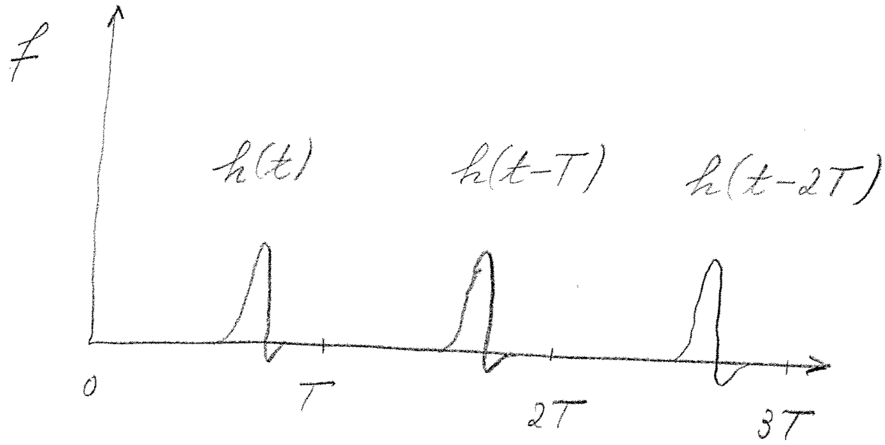
$$\Longrightarrow \quad \frac{\Delta x^0}{c} \approx \gamma^{-2} \frac{\Delta y^0}{c} \approx \frac{1}{\omega_0 \gamma^3} \qquad (12.40)$$

Periode der Pulse: $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Sei f die Amplitude einer Feldkomponente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT), \qquad (12.41)$$

wo h einen einzelnen Puls beschreibt.



Breite der in $\vec{x}$ empfangenen Pulse, nach (12.40),

$$\Delta t = \frac{\Delta x^0}{c} \approx \frac{1}{\omega_0 \gamma^3}.$$

$$\Rightarrow \quad \hat{h}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, h(t)\, e^{i\omega t}$$

hat Breite $\Delta\omega \approx (\Delta t)^{-1} \approx \omega_0 \gamma^3$.

f ist periodisch in t mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. $\Rightarrow$

f kann in Fourierreihe entwickelt werden:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n\, e^{-i\omega_0 n t},$$

wo

$$\varphi_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T dt\, f(t)\, e^{i\omega_0 n t}$$

$$\approx \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T dt\, h(t)\, e^{i\omega_0 n t} = \omega_0\, \hat{h}(n\omega_0)$$

Da $\hat{h}$ die Breite $\Delta\omega \approx \omega_0 \gamma^3$ hat, folgt, dass

$|\varphi_n|$ gross, für $|n| \lesssim \gamma^3$!

Wellenlänge des ausgestrahlten Lichtes:

Grundfrequenz $\omega_0 \leftrightarrow$ Wellenlänge $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$,

d.h. $\lambda_0 = Tc = \frac{2\pi r}{v} c \approx 2\pi r$.

Höhere Harmonische: $\omega_n = n\omega_0$, $|n| \lesssim \gamma^3$

$\Rightarrow$ Minimale Wellenlänge $\lambda_{min.} \approx \frac{2\pi r}{\gamma^3}$.

Strahlungsdämpfung, (klassische Theorie).

Lagrange-Dichte eines Punktteilchens im äusseren e.m. Feld:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\phi + e\vec{A}\cdot\vec{\beta}, \qquad (12.42)$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \beta = |\vec{\beta}|.$$

Betrachten n Punktteilchen. Lagrange Funktion des Gesamtsystems ist

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j, \qquad (12.43)$$

$$L_j = -m_j c^2 \sqrt{1-(\dot{\vec{x}}_j/c)^2} - e_j \phi(\vec{x}_j, t) + \frac{e_j}{c} \vec{A}(\vec{x}_j, t)\cdot\dot{\vec{x}}_j,$$

wo ϕ und $\vec{A}$ die von den n Teilchen erzeugten retardierten Potentiale sind:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{\rho(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|} d^3y,$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \int \frac{\vec{j}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|} d^3y,$$

$(\rho, \vec{j})$: Viererstromdichte der n Teilchen.

Betrachten nicht-relativistischen Grenzfall:

$$|\dot{\vec{x}}_j| \ll c, \quad \forall j$$

Dann können wir in $\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{ct} \approx \frac{v}{c}$,

v = mittlere Geschwindigkeit der Teilchen, entwickeln

Es folgt:

$$\phi(\vec{x},t) \approx \int \frac{\rho(\vec{y},t)}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} d^3y - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int \frac{\rho(\vec{y},t)}{4\pi} d^3y}_{= q_{tot}}$$

$$+ \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{|\vec{x}-\vec{y}|\,\rho(\vec{y},t)}{4\pi} d^3y + \cdots, \qquad (12.44)$$

wo $q_{tot.}$ (unabh. von t!) die Gesamtladung ist. Im nicht-relativistischen Grenzfall ist $j(\vec{y},t) = \frac{1}{c}\rho(\vec{y},t)\cdot\vec{v}(\vec{y},t)$. Daher

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\rho(\vec{y},t)}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\,\vec{v}(\vec{y},t)\,d^3y + \cdots \qquad (12.45)$$

Für eine Punktladung mit Ladung e folgt, mit $r = |\vec{x}-\vec{y}|$, $\vec{y}$ = Ort der Punktladung:

$$\phi = \frac{e}{4\pi r} + \frac{e}{8\pi c^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \quad \vec{A} = \frac{e\vec{v}}{4\pi c r}.$$

Nun machen wir eine Eichtransformation:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi,$$

und setzen

$$\chi = \frac{e}{8\pi c}\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Dann erhalten wir:

$$\phi' = \frac{e}{4\pi r}, \quad \vec{A}' = \frac{e\vec{v}}{4\pi c r} + \frac{e}{8\pi c}\vec{\nabla}\frac{\partial r}{dt} \qquad (12.46)$$

Nun ist

$$\vec{\nabla} r = \nabla_x |\vec{x}-\vec{y}| = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} =: \vec{n}.$$

Also folgt, mit $\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\cdot)$:

$$\vec{A}' = \frac{e\vec{v}}{4\pi c r} + \frac{e}{8\pi c}\dot{\vec{n}},$$

mit

$$\dot{\vec{n}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = \frac{-\dot{\vec{y}}}{r} - \frac{(\vec{x}-\vec{y})\dot{r}}{r^2}$$

$$= \frac{-\vec{v} + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})}{r}.$$

Damit finden wir:

$$\phi' = \frac{e}{4\pi r}, \quad \vec{A}' = \frac{e[\vec{v} + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})]}{8\pi c r} \tag{12.47}$$

Dies setzen wir nun in L_j und dann in (12.43) ein und benützen, dass

$$-mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} \simeq -mc^2 + m\frac{v^2}{2} + \frac{mv^4}{8c^2} + \cdots.$$

Lassen wir die Konstante $-\sum_j m_j c^2$ weg, so folgt:

$$L^{(2)} = \sum_j m_j\left(\frac{v_j^2}{2} + \frac{v_j^4}{8c^2}\right) - \sum_{i<j}\frac{e_i e_j}{4\pi r_{ij}}$$

$$+ \sum_{i<j}\frac{e_i e_j}{8\pi c^2 r_{ij}}\left[\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j + (\vec{v}_i\cdot\vec{n}_{ij})(\vec{v}_j\cdot\vec{n}_{ij})\right]. \tag{12.48}$$

Diese Lagrange-Funktion verbessert die Lagrange-Funktion

$$L^{(0)} = \sum_j m_j \frac{v_j^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{e_i e_j}{4\pi r_{ij}} \qquad (12.49)$$

des nicht-relativistischen Coulomb Systems um alle Terme der Ordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^2$! Falls alle Ladungen dasselbe Vorzeichen haben, findet man globale Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Nun führen wir die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{v}{c}$ um eine Ordnung weiter. Dies wird uns auf das Phänomen der <u>Strahlungsdämpfung</u> führen.

Beiträge dritter Ordnung in $\frac{v}{c}$ zu ϕ und zu $\vec{A}\cdot\frac{\vec{v}}{c}$ sind:

$$\phi^{(3)}(\vec{x},t) = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int \frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4\pi}\rho(\vec{y},t)\,d^3y$$

und

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\vec{j}(\vec{y},t)}{4\pi}\,d^3y .$$

Wieder benützen wir eine Eichtransformation, um $\phi^{(3)}$ loszuwerden:

$$\phi'' = \phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi'}{\partial t}\,, \quad \vec{A}'' = \vec{A}' + \vec{\nabla}\chi'\,,$$

wo

$$\chi'(\vec{x},t) = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4\pi}\rho(\vec{y},t)\,d^3y$$

Dann folgt für $\vec{A}''$ in 2. Ordnung in $\frac{v}{c}$:

$$\vec{A}''^{(2)}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\vec{j}(\vec{y},t)}{4\pi}\,d^3y - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\nabla}\int \frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4\pi}\rho(\vec{y},t)\,d^3y$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\vec{j}(\vec{y},t)}{4\pi}\,d^3y - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{\vec{x}-\vec{y}}{4\pi}\rho(\vec{y},t)\,d^3y \qquad (12.50)$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{x}-\vec{y}) = -\vec{v}\,.$$

Setzt man diese Gl. und $\vec{j} = \rho\vec{v}$ in (12.50) ein, so folgt für Punktladungen:

$$\vec{A}^{\,\prime\prime(2)}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi c^2}\sum_j e_j\,\dot{\vec{v}}_j\;\delta(\vec{x}-\vec{y}_j(t))$$

$$+\frac{1}{12\pi c^2}\sum_j e_j\,\dot{\vec{v}}_j\;\delta(\vec{x}-\vec{y}_j(t))$$

$$= -\frac{1}{6\pi c^2}\sum_j e_j\,\dot{\vec{v}}_j\;\delta(\vec{x}-\vec{y}_j(t))$$

Daraus folgt für das elektromagnetische Feld:

$$\vec{B}^{(2)} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}^{\,\prime\prime(2)} = 0,$$

$$\vec{E}^{(2)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^{\,\prime\prime(2)}$$

$$= \frac{1}{6\pi c^3}\sum_j e_j\,\ddot{\vec{v}}_j\;\delta(\vec{x}-\vec{y}_j(t)) \qquad (12.51)$$

Da $\vec{E}$ und $\vec{B}$ eichinvariant sind, können wir den Doppelstrich weglassen.

Nun diskutieren wir die Strahlungsdämpfung für ein einziges geladenes Punktteilchen im "Selbstfeld". Zunächst bemerkt man, dass man die Coulombselbstenergie und die Strom-Strom Wechselwirkungsenergie weglassen kann; (Terme

mit $i=j$ fehlen auf der R.S. von (12.48)!).
Also trägt erst $\vec{E}^{(2)}$ zur Selbstwechselwirkung bei. Das Feld $\vec{E}^{(2)}$ erzeugt die Kraft

$$\vec{F} = e\vec{E}^{(2)} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\vec{v}} \qquad (12.52)$$

Im <u>Ruhesystem</u> des Punktteilchens ($\vec{v}=0$) ist diese Formel für die Kraft exakt, da dann die Strom-Strom Wechselwirkungsenergie eh verschwindet! Die Bewegungsgleichung lautet also:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\vec{v}} \qquad (12.53)$$

<u>Lösungen.</u>

(1) $\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{const.}$

(2) $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{(6\pi c^3 m/e^2)t}$. (12.54)

Das ist eine sog. "run-away Lösung".

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = a e^{bt} + c\,, \quad b = \frac{6\pi c^3 m}{e^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = \frac{a}{b}e^{bt} + ct + d.$$

<u>Einbezug äusserer Kräfte:</u> Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\vec{x}} - \frac{e^2}{6\pi c^3}\dddot{\vec{x}} - \vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = 0. \qquad (12.55)$$

In einem derartigen System können akausale Phänomene auftreten; (Teilchen läuft fort, <u>bevor</u> Kraft einwirkt).

<u>Beispiele.</u>

(i) <u>Konstante Kraft</u>: $\vec{F} = f\vec{e}_3$.

Ansatz für Lösung von (12.55): $\vec{x} = z\,\vec{e}_3$.

Einsetzen in (12.55) und Lösen der Gl. gibt:

$$z(t) = a\,e^{bt} + \underbrace{\frac{f}{2}t^2 + v_0 t + z_0}$$

übliche Bewegung ohne Strahlungsdämpfung.

(ii) <u>Oszillator:</u> $\vec{F} = -f\vec{x} \Rightarrow$

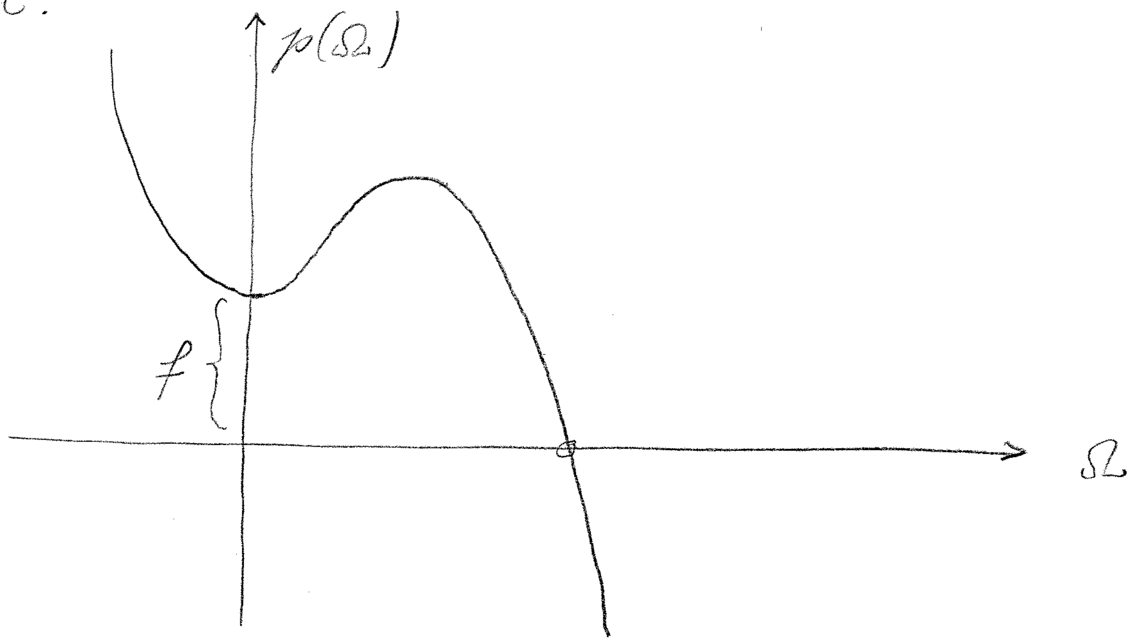
$$m\ddot{\vec{x}} - \frac{e^2}{6\pi c^3}\dddot{\vec{x}} + f\vec{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{x}(t) = \mathrm{Re}\left(\vec{a}\,e^{\Omega t}\right),$$

wo Ω die Gleichung

$$p(\Omega) \equiv m\Omega^2 - \frac{e^2}{6\pi c^3}\Omega^3 + f = 0$$

löst.



Es gibt immer eine positive Lösung, die aber unphysikalisch ist und zwei komplex-konjugierte Lösungen; (gedämpfte Oszillationen).