Kontinuumsmechanik. Übung 5.

FS12 *Abgabe: 3.4.12*

1. Numerische Lösung eines Randwertproblems mit Matlab

Matlab implementiert die Methode der Finiten Elemente zur Lösung 2-dimensionaler elastischer Randwertprobleme.

Vorgehen: (i) Starte *Matlab*; (ii) gib die Kommandozeile *pdetool* ein: ein Fenster *PDE Toolbox* öffnet sich; (iii) wähle *Structural Mech., Plain Stress*; (iv) unter *PDE Specification* kann man die Werte des Young–Moduls E ($\equiv \varepsilon$ in der Vorlesung) und des Poisson Verhältnis ν, sowie Volumenkräfte eingeben; (v) mit *Draw* zeichne das Gebiet, evtl. unter Benutzung eines Koordinatennetzes (s. *Options*); (vi) mit *Boundary* lege die Randbedingungen fest; (vii) mit *Mesh* trianguliere das Gebiet, bzw. verfeinere die Triangulation; (viii) unter *Plot* kann man den Darstellungsmodus der Lösung wählen: die Verschiebung (displacement), die Verzerrung (strain) oder die Spannung (stress). Eine mögliche Wahl unter vielen ist: Verschiebung als "deformed mesh" und Spannung als "von Mises stress" ($= (\mathrm{tr}(\hat{\sigma}^2/2))^{1/2}$, einem Mass der Schubspannungen; $\hat{\sigma}$ ist der spurlose Anteil von σ); (ix) ein Klick auf = löst nun das Randwertproblem.

Hinweise: In Matlab heissen die Koordinaten x und y, oder auch 1 und 2; entsprechend die Verschiebungen (u, v), oder auch u_i, $(i = 1, 2)$. Unter 'PDE > PDE Specification' können Volumenkräfte als Kx, Ky eingegeben werden. Unter 'Boundary > Boundary mode' können Teile des Randes mit Randbedingungen versehen werden. Vorgegebene Verschiebungen (oder Linearkombinationen davon) heissen r_i, vorgegebene Oberflächenkräfte g_i.

- Dirichlet-Randbedingung: $h_{ij}u_j = r_i$. Eingespannte Ränder ($u_i = 0$) entsprechen $h_{ij} = \delta_{ij}$, $r_i = 0$.
- Verallgemeinerte Neumann-Randbedingung: $\sigma_{ij}n_j + q_{ij}u_j = g_i$ mit Aussennormale n_i. Von Bedeutung ist hier nur $q_{ij} = 0$.

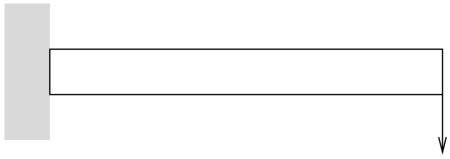
Eine Anleitung zu *PDE Toolbox* findet man unter
`http://www.mathworks.ch/help/toolbox/pde/pde_product_page.html`

Löse folgende Anordnungen eines homogenen, elastischen Balkens.

a) Reine Biegung, vgl. (3.2).

Hinweis: Da nirgends auf dem Rand Verschiebungen vorgegeben sind, ist die Lösung nur bis auf eine infinitestimale starre Bewegung eindeutig; entsprechend ist die Matrix (bis auf numerische Rundungen) singulär (Fehlermeldung); das Spannungsfeld ist aber eindeutig.

b) Schwereloser Balken, an einem Ende eingespannt; am anderen einer nach unten gerichteten Oberflächenkraft unterworfen.



Hinweis: Die Verschiebung verschwindet am eingespannten Ende.

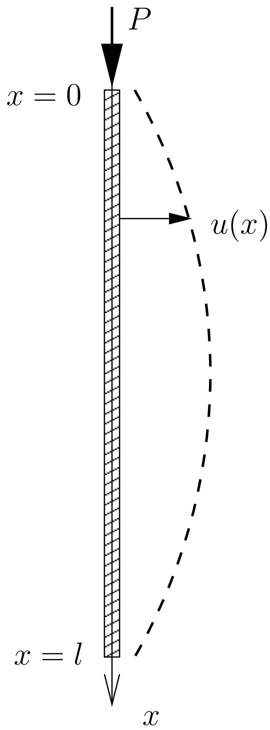
c) Schwerer Balken, an einem Ende horizontal eingespannt; am anderen frei.

d) Wie (c), aber an beiden Enden horizontal eingespannt, vgl. Aufgabe 5.2 (ii).

2. Die Knicklast einer Säule

Die zulässige vertikale Belastung einer Säule ist meistens nicht durch Materialversagen unter Quetschung begrenzt, sondern durch die Knicklast.

Betrachte eine Auslenkung $u(x)$ in Richtung einer Hauptachse des Querschnitts (Flächenträgheitsmoment I). Die Endpunkte seien fest und die Säule ohne Eigengewicht.



i) Zeige, dass $u(x)$ in der Euler-Bernoulli Näherung der Differentialgleichung

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{P}{\varepsilon I}u\,, \tag{1}$$

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{2}$$

genügt. Was ist der kleinste Wert von P, für den eine nicht triviale Lösung existiert?

Hinweis: Im Unterschied zur Vorgabe von $u(0)$, $u'(0)$ ist die Lösung von (1) bei den Randbedingungen (2) unter Umständen nicht eindeutig.

ii) Eine Energiebetrachtung erhellt die Bedeutung dieses Sachverhalts. Zeige, dass die Energie der Verschiebung $u(x)$ durch

$$F[u] = \frac{\varepsilon I}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \tag{3}$$

gegeben ist. Die beiden Terme sind die elastische Energie der Säule und die potentielle der Last. Zur Herleitung des ersten Terms gehe (im Sinne der Euler-Bernoulli Näherung) davon aus, dass der Spannungszustand im Querschnitt x so ist, als ob es sich um eine reine Biegung mit Moment $M(x)$ handelte. Mit $v = du/dx$ lautet (3)

$$F[u] = \frac{\varepsilon I}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^l v^2 dx\,, \tag{4}$$

wobei $\int_0^l v(x)\,dx = 0$. Die Euler-Lagrange Gleichung zu F bei festen Endpunkten (2) ist (1). Wann ist das Funktional positiv definit?