Kontinuumsmechanik. Übung 10.

FS12 *Abgabe: 22.5.12*

1. Stokes-Drift

Untersuche die Bahnen $(x_1(t), x_2(t))$ der Teilchen in einer Schwerewelle. In 1. Ordnung der Amplitude der Welle sind die Bahnen periodisch (vgl. Skript S. 77). Zeige, dass in 2. Ordnung eine fortschreitende Bewegung der Teilchen in Richtung der Welle stattfindet, und zwar mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\frac{1}{T}\int_0^T v_1(x_1(t), x_2(t), t)\, dt = B^2 \omega(k) k \, \frac{\operatorname{ch} 2k(a+h)}{2 \operatorname{sh}^2 kh}\,, \tag{1}$$

wobei: T Periode, B Amplitude der Oberflächenwelle, a mittlere Höhe des Teilchens $(-h < a < 0)$.

Hinweis: Diese Grösse ist nicht mit der mittleren Geschwindigkeit an einem festen Ort,

$$\frac{1}{T}\int_0^T v_1(0, a, t)\, dt = 0\,,$$

zu verwechseln, was mit der Rechnung in 1. Ordnung übereinstimmt. Entwickle die Differenz nach Taylor und verwende dazu die Berechnung der Bahn aus der Vorlesung.

2. Energietransport und Gruppengeschwindigkeit

Man zeige, dass die Geschwindigkeit des Energietransportes einer ebenen Schwerewelle der Wellenzahl k durch die Gruppengeschwindigkeit gegeben ist, d.h. dass

$$\frac{\bar{j}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{d\omega}{dk}$$

gilt mit

- $\bar{\varepsilon}$: mittlere Energiedichte ($\varepsilon = 0$ für die ruhende Flüssigkeit),
- $\bar{j}$: mittlere Energiestromdichte (in Fortpflanzungsrichtung),

beide über die Wassertiefe h integriert.

Hinweis: Nach Aufgabe 7.2 sind $\varepsilon = \rho(\vec{v}^2/2 + g x_2)$ und $\vec{j} = (\varepsilon + p)\vec{v}$ die instantane Energie– bzw. Energiestromdichte für eine inkompressible Flüssigkeit im homogenen Schwerefeld. Die Mittelung ist über eine Periode oder eine Wellenlänge. Z.B. ist

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dx_1 \int_{-h}^{\eta} dx_2\, \rho \frac{\vec{v}^2}{2}$$

und man findet für die ebene Welle auf S. 76

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{kin}} = \frac{\rho k}{8} A^2 \operatorname{sh} 2kh\,.$$

Ebenso für $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{pot}}$.

3. Wind und Wellen

Zwei inkompressible Fluida der Dichten $\rho_1 < \rho_2$ (z.B. 1 = Luft, 2 = Wasser) erstrecken sich über je einen Halbraum, getrennt durch die horizontale Grenzfläche $x_2 = 0$. Die horizontale Relativgeschwindigkeit von 1 zu 2 sei u. Bestimme die Frequenz ω kleiner Schwingungen der Grenzfläche als Funktion der Wellenzahl k und der Geschwindigkeit u (Dispersionsrelation). Insbesondere:

i) Wie lautet die Dispersionsrelation für $u = 0$?

ii) Welche Wellenlängen erzeugt der Wind? Bestimme dazu $u_0(k)$ so, dass für $u > u_0(k)$ die Frequenz $\omega(k, u)$ komplex wird. Dann wird die horizontale Grenzfläche instabil (Kelvin-Helmholtz-Instabilität). Was passiert für $\rho_1 = \rho_2$?

Hinweis: Setze wirbelfreie Geschwindigkeitsfelder in 1 und 2 an mittels

$$\vec{v}_1 = -\vec{\nabla}(-ux_1 + \varphi_1) \equiv -\vec{\nabla}\phi_1\,, \qquad \vec{v}_2 = -\vec{\nabla}\varphi_2 \equiv -\vec{\nabla}\phi_2$$

mit φ_1, φ_2 klein; ferner

$$\varphi_i(x_1, x_2, t) = a_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} \mathrm{e}^{\mp\kappa x_2}\,, \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

und für die Grenzfläche

$$\eta(x, t) = a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)}\,.$$

Die Geschwindigkeitspotentiale $\phi_i = \phi_i^0 + \varphi_i$ stellen eine Störung der homogenen Felder in beiden Medien dar ($-\vec{\nabla}\phi_1^0 = (u, 0)$, $\vec{\nabla}\phi_2^0 = 0$). Sie erfüllen die Euler-Bernoulli Gleichungen mitsamt Randbedingungen: Teilchen auf je einer Seite der Grenzfläche bleiben dort (gegenüberliegende aber nicht beisammen) und auf beiden herrscht der selbe Druck.

Linearisiere, bestimme κ und finde das homogene Gleichungssystem für a, a_1, a_2. Es hat eine nicht-triviale Lösung für

$$\omega = \frac{\rho_1 uk \pm \sqrt{(\rho_2^2 - \rho_1^2)gk - \rho_1\rho_2 u^2 k^2}}{\rho_1 + \rho_2}\,. \tag{3}$$

Daraus folgen die Antworten.