Übung 1. *Additionstheorem für Kugelfunktionen.*

Bei der Entwicklung der ebenen Welle nach Kugelfunktionen (Skript Kapitel 1.3.5.) wird das Additionstheorem für Kugelfunktionen benützt. Im Skript wird nur der Fall $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{e}_z$ betrachtet. Für allgemeine Richtungen lautet das Additionstheorem

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{k}}) Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}), \tag{1}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{x}$ ist. Damit findet man die Entwicklung

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{k}}) Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}). \tag{2}$$

Wir wollen nun das Additionstheorem für allgemeine Richtungen herleiten.

(a) Wir nehmen an, dass $\boldsymbol{k}$ im Raum fixiert ist. Dann ist $P_l(\cos\theta)$ nur noch eine Funktion von $\Omega_{\boldsymbol{x}}$, mit $\Omega_{\boldsymbol{k}}$ als Parameter, und kann somit nach Kugelfunktionen entwickelt werden:

$$P_l(\cos\theta) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\Omega_{\boldsymbol{k}}) Y_{l'm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}), \tag{3}$$

mit

$$A_{l'm}(\Omega_{\boldsymbol{k}}) = \int Y^*_{l'm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}) P_l(\cos\theta) \quad d\Omega. \tag{4}$$

Beim Vergleich der Entwicklung (3) mit dem Additionstheorem (1) sehen wir, dass nur Terme $l' = l$ vorkommen. Begründe dies.
Hinweis.

- *Kugelfunktionen lösen die Gleichung*

$$\nabla^2 Y_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm} = 0. \tag{5}$$

Für $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{e}_z$ löst auch $P_l(\cos\theta)$ diese Gleichung. Begründe dies.
Was passiert bei einer Rotation des Koordinatensystems zurück zum ursprünglichen $\boldsymbol{k}$ mit den einzelnen Termen? Was bedeutet dies für $P_l(\cos\theta)$?

Lösung. Wenn $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{e}_z$, so ist θ der normale Polarwinkel in den sphärischen Koordinaten. Dann löst $P_l(\cos\theta)$ wegen (7) die Gleichung (5). Bei einer Rotation des Koordinatensystems zu den ursprünglichen Koordinaten ändern sich r nicht und ∇^2 ist rotationsinvariant, so dass $P_l(\cos\theta)$ diese Gleichung noch immer löst. Somit ist $P_l(\cos\theta)$ eine Kugelfunktion der Ordnung l und wir müssen nur Terme mit $l = l'$ berücksichtigen.

(b) Berechne also

$$A_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{k}}) =: A_m(\Omega_{\boldsymbol{k}}) = \int Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}) P_l(\cos\theta) \quad d\Omega. \tag{6}$$

Hinweise.

- *Entwickle* $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}})$ *nach* $Y^*_{l'm'}(\Omega_{\boldsymbol{t}})$ *mit* $\Omega_{\boldsymbol{t}} = (\theta, \phi)$ *und benütze*

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \tag{7}$$

  um einen Term der gesuchten Form (6) zu finden.

- *Betrachte* $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}})$ *bei* $\theta = 0$.

Lösung. Bei der Entwicklung von $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}})$ nach $Y^*_{l'm'}(\Omega_{\boldsymbol{t}})$ müssen nur Terme $l' = l$ betrachtet werden, gleiche Argumentation wie bei der Lösung von Teil (a). Wir haben also

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}) = \sum_{m'=-l}^{l} B_{lm'} Y^*_{lm'}(\Omega_{\boldsymbol{t}}) \tag{L.1}$$

mit

$$B_{lm'} = \int Y_{lm'}(\Omega_{\boldsymbol{t}}) \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}) \quad d\Omega, \tag{L.2}$$

$$B_{l0} = \int P_l(\cos\theta) Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}}) \quad d\Omega, \tag{L.3}$$

wobei wir in der zweiten Zeile (7) benützt haben. Man sieht sofort, dass $B_{l0} = A_m$, was gesucht war.
Bei $\theta = 0$ gilt einerseits

$$\left[\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}})\right]_{\theta=0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{k}}) \tag{L.4}$$

und ausserdem ist wegen $Y_{lm}(0, \phi) = 0$ für $m \neq 0$, (7) und $P_l(1) = 1$

$$\left[\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{x}})\right]_{\theta=0} = B_{l0} Y^*_{l0}(\Omega_{\boldsymbol{t}}) \tag{L.5}$$

$$= B_{l0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos 0) \tag{L.6}$$

$$= B_{l0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \tag{L.7}$$

Einsetzen von $B_{l0} = A_m = \frac{4\pi}{2l+1} Y^*_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{k}})$ in (3) mit $l' = l$ ergibt das Additionstheorem.

Übung 2. *Streuung an der harten Kugel: Fortsetzung.*

Die Streuung an der harten Kugel (Skript Kapitel 1.3.4.) entspricht der Streuung am Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r > a. \end{cases} \tag{8}$$

Die Streuphase ist gegeben durch

$$\tan \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}, \tag{9}$$

mit $j_l(\rho)$ der sphärischen Bessel-Funktion und $n_l(\rho)$ der sphärischen Neumann-Funktion, welche die linear unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right] f(\rho) = 0 \tag{10}$$

sind und definiert werden durch

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho}, \qquad n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\cos\rho}{\rho}. \tag{11}$$

Für den Wirkungsquerschnitt gilt

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l(k). \tag{12}$$

In dieser Aufgabe wollen wir einige Schritte aus dem Skript genau nachrechnen und die Diskussion auf den Hochenergiebereich ausdehnen.

(a) Zeige die folgenden Näherungen der spärischen Bessel- und Neumann-Funktionen:
Für $\rho \to 0$

$$j_l(\rho) = \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, \qquad n_l(\rho) = -\frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}, \tag{13}$$

und für $\rho \to \infty$

$$j_l(\rho) = \frac{1}{\rho}\sin(\rho - \pi l/2), \qquad n_l(\rho) = -\frac{1}{\rho}\cos(\rho - \pi l/2). \tag{14}$$

Lösung. Für $\rho \to 0$ entwickeln wir den sin und wenden die Ableitung $\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)$ nacheinander an

$$\begin{aligned}
j_l(\rho) &= (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho} && \text{(L.8)}\\
&= (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\rho^{2n}}{(2n+1)!} && \text{(L.9)}\\
&= (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n\rho^{2n-2}}{(2n+1)!} && \text{(L.10)}\\
&= ...\\
&= (-\rho)^l \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-2)(2n-4)...(2n-2(l-1))\rho^{2n-2l}}{(2n+1)!} && \text{(L.11)}\\
&= (-\rho)^l \sum_{n=l}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-2)(2n-4)...(2n-2(l-1))\rho^{2n-2l}}{(2n+1)!}, && \text{(L.12)}\\
& && \text{(L.13)}
\end{aligned}$$

weil alle Terme $n < l$ verschwinden. Nun nehmen wir denn Limes $\rho \to 0$, was dem Term $n = l$ der Summe entspricht und bekommen

$$\begin{aligned}
j_l(\rho) &\approx \rho^l \frac{2l(2l-2)(2l-4)...2}{(2l+1)!} && \text{(L.14)}\\
&= \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}. && \text{(L.15)}\\
& && \text{(L.16)}
\end{aligned}$$

Für $n_l(\rho)$ folgt analog

$$\begin{aligned}
n_l(\rho) &= -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\cos\rho}{\rho} && \text{(L.17)}\\
&= -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\rho^{2n-1}}{(2n)!} && \text{(L.18)}\\
&= -(-\rho)^l \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)(2n-3)(2n-5)...(2n-2l+1)\rho^{2n-1-2l}}{(2n)!} && \text{(L.19)}
\end{aligned}$$

wo aber keine Terme verschwinden. Nehmen wir denn Limes $\rho \to 0$, so entspricht dies dem Term $n = 0$ der Summe und wir bekommen das gesuchte Ergebnis.

Für $\rho \to \infty$ bemerken wir, dass die Ableitung $\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho}$ wegen der Produktregel im Limes jeweils nur auf den sin wirkt und können daher schreiben

$$j_l(\rho) \approx (-\rho)^l \frac{1}{\rho^{l+1}} \frac{d^l}{d\rho^l} \sin\rho \tag{L.20}$$

$$= \frac{1}{\rho} \sin(\rho - \pi l/2). \tag{L.21}$$

Der Beweis für $n_l(\rho)$ folgt analog.

Bemerkung. Die Entwicklung für $\rho \to \infty$ gilt nur falls auch $\rho \gg l$.

(b) Berechne den totalen Wirkungsquerschnitt für den Niederenergiebereich ($ka \ll 1$).
Hinweis. Es ist ausreichend nur $l = 0$ (sogenannte s-Wellen-Streuung) zu betrachten. Wieso?

Lösung. Wir finden für $ka \ll 1$, indem wir die Entwicklung für $\rho \to 0$ einsetzen

$$\tan\delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)} \tag{L.22}$$

$$\approx \frac{-(ka)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}. \tag{L.23}$$

Wir müssen nur den Term $l = 0$ betrachten, da die höheren Ordnungen stark unterdrückt sind und da $ka \ll 1$ können wir auch den tan entwickeln. So erhalten wir

$$\delta_l \approx -ka. \tag{L.24}$$

Auch die Formel (12) für den Wirkungsquerschnitt entwickeln wir und erhalten so

$$\sigma(k) \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\delta_l^2. \tag{L.25}$$

Da nur $l = 0$ relevant ist, bekommen wir schlussendlich

$$\sigma(k) \approx 4\pi a^2. \tag{L.26}$$

(c) Wir wollen auch den Wirkungsquerschnitt für den Hochenergiebereich ($ka \gg 1$) berechnen. Die Summation über alle Drehimpulse in (12) ist nach oben beschränkt durch $l \lesssim ka$, da für fixes ka gilt, dass $\delta_l(ka) \to 0$ für $l \gtrsim ka$. Dies kann numerisch verifiziert werden. Der Wirkungsquerschnitt kann abgeschätzt werden, indem man $\sin^2\delta_l$ in (12) durch seinen Mittelwert 1/2 ersetzt und nur die höchste Ordnung behält:

$$\sigma(k) \approx \frac{4\pi a^2}{(ak)^2} \sum_{l=0}^{ka} (2l+1)\frac{1}{2} \tag{15}$$

$$\approx 2\pi a^2. \tag{16}$$

Man kann jedoch nicht auf eine einfache Art beweisen, dass die Abschätzung des $\sin^2$ so gemacht werden darf. Verifiziere daher dieses Ergebnis numerisch.

Lösung. Man drückt den $\sin^2$ in (12) durch einen $\tan^2$ aus und setzt (9) ein:

$$\frac{\sigma(k)}{4\pi a^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(ak)^2} \frac{j_l^2(ka)}{j_l^2(ka) + n_l^2(ka)} \tag{L.27}$$

$$\tag{L.28}$$

Die Summe sollte 0.5 ergeben. Zuerst verifiziert man, dass $l \lesssim ka$ indem man einige Summanden bei grossem ka für verschiedene l, auch $l > ka$, berechnet und plottet.

Zum Beispiel mit Mathematica:

```
ListPlot[Table[{i,(2i+1.)/1000^2 SphericalBesselJ[i,1000]^2/(SphericalBesselJ[i,1000]^2+
  SphericalBesselY[i,1000]^2)},{i,0,2000,10}]]
```

Danach berechnet man die Summe für einige grosse Werte von ka:

```
ListPlot[Table[{j,Sum[(2 i + 1.)/j^2 SphericalBesselJ[i, j]^2/(SphericalBesselJ[i, j]^2+
  SphericalBesselY[i,j]^2),{i,0,j*1.1}]},{j,100,2000,200}]]
```

Im Limes sehr grosser ka bekommt man das Resultat 0.5.

Für eine genaue mathematische Betrachtung siehe P.M. Morse und H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953.

(d) Vergleiche die Wirkungsquerschnitte aus (b) und (c) mit dem klassischen Resultat. Was hätten wir erwartet?

Lösung. Wir haben

$$\sigma_{klassisch} = \pi a^2 \tag{L.29}$$

$$\sigma_{ka \ll 1} = 4\pi a^2 \tag{L.30}$$

$$\sigma_{ka \gg 1} = 2\pi a^2. \tag{L.31}$$

Der Faktor 2 im Hochenergiebereich ist unerwartet, kann aber mit der sogenannten Schattenstreuung erklärt werden (siehe Franz Schwabl, Quantenmechanik: Eine Einführung, Springer, Berlin, 2007, Kapitel 18.10 oder die oben erwähnten Methods of Theoretical Physics, Kapitel 11 (Band 2)) und hat schlussendlich mit der Definition des Wirkungsquerschnittes im klassischen Fall gegenüber der Quantenmechanik zu tun.
Bei der klassischen Definition des rein geometrischen Wirkungsquerschnittes betrachtet man bei der harten Kugel nur die Reflexion, also den Querschnitt πa^2. Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein klassisches Teilchen gestreut wird. Bei Wellen muss für den gesamten Wirkungsquerschnitt hingegen auch der erzeugte Schatten hinter der Kugel mitberücksichtigt werden (Beugungseffekte), der nochmals πa^2 beiträgt. Bei der Betrachtung von Streuung in der Quantenmechanik wird die einfallende Welle ganz am Anfang separiert von der gestreuten Welle: $\psi = \psi_{ein} + \psi_{streu}$. Da ψ_{streu} klassisch eigentlich nur die Reflexion beinhaltet, hätten wir so keinen Schatten, da ψ_{ein} auch direkt hinter der Kugel auftaucht. Daher berücksichtigt man bei der gestreuten Welle einen zusätzlichen Schattenterm, der den Teil der einfallenden Welle direkt hinter der Kugel wieder auslöscht und damit den Schatten erzeugt.