Übung 1. *Streuung identischer Teilchen*

Wir betrachten die Streuung zweier identischer Teilchen im Schwerpunktsystem mit einem spinunabhängigen Streuungs-Hamiltonian. In diesem Bezugssystem können wir nicht zwischen einer Streuung des Teilchens um Winkel Θ und einer Streuung um Winkel $\pi - \Theta$ unterscheiden. Wir erhalten daher einen Interferenzterm zwischen den beiden Amplituden $f(\Theta)$ und $f(\pi - \Theta)$, der durch die Symmetriebedingung auf die Wellenfunktion eindeutig bestimmt ist.

(a) Schreibe für den Fall einer Streuung identischer spinloser Bosonen die auslaufende Welle mit Hilfe der Streuamplituden $f(\Theta)$ und $f(\pi-\Theta)$. Was ergibt sich demnach für den differentiellen Wirkungsquerschnitt?

Lösung: Im Falle von identischen bosonischen Teilchen wissen wir, dass die Wellenfunktion symmetrisch unter Vertauschung der Teilchen sein muss. Wir können daher die auslaufende Welle schreiben als

$$\psi_{aus}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}\left[f_k(\Theta) + f_k(\pi - \Theta)\right]. \tag{L.1}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist deshalb gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\Theta) + f_k(\pi - \Theta)|^2 = |f_k(\Theta)|^2 + |f_k(\pi - \Theta)|^2 + 2Re\left[f_k^*(\Theta) f_k(\pi - \Theta)\right]. \tag{L.2}$$

Im Falle $\Theta = \pi/2$ ergibt sich demnach

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\Theta) + f_k(\pi - \Theta)|^2 = 4|f_k(\pi/2)|^2. \tag{L.3}$$

Man erhält also einen Faktor 4; für unterscheidbare Teilchen hätte man lediglich einen Faktor 2 erwartet (das wäre das Ergebnis ohne den Interferenzterm).

(b) Gib im Falle von identischen Fermionen die Wirkungsquerschnitte an für

(1) zwei Elektronen im Singlett-Zustand

(2) zwei Elektronen im Triplett-Zustand

(3) unpolarisierte Elektronen.
Hinweis: Dies ist eine Kombination der beiden vorherigen Fälle.

Vergleiche diese jeweils für den Winkel $\Theta = \pi/2$ mit dem Ergebnis für unterscheidbare Teilchen.

Lösung:

(1) In diesem Fall ist die Spin-Wellenfunktion bereits antisymmetrisch unter Vertauschung der Teilchen, weshalb die räumliche Wellenfunktion wie im Falle der Bosonen symmetrisch unter Austausch der Teilchen ist. Für den Interferenzterm erhalten wir also das gleiche Ergebnis wie oben für den Fall identischer Bosonen.

(2) Befindet sich der Spin der Teilchen jedoch in der Triplett-Konfiguration, muss die räumliche Wellenfunktion der Teilchen antisymmetrisch sein. Die auslaufende Welle lässt sich dann schreiben als

$$\psi_{aus}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}\left[f_k(\Theta) - f_k(\pi - \Theta)\right]. \tag{L.4}$$

Für den Wirkungsquerschnitt erhält man also:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\Theta) - f_k(\pi - \Theta)|^2 = |f_k(\Theta)|^2 + |f_k(\pi - \Theta)|^2 - 2Re\left[f_k^*(\Theta) f_k(\pi - \Theta)\right]. \tag{L.5}$$

Im Falle $\Theta = \pi/2$ folgt nun:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\Theta) - f_k(\pi - \Theta)|^2 = 0. \tag{L.6}$$

Man erhält also keinen Streuanteil im Winkel von 90°.

(3) Unpolarisierte gestreute Fermionen befinden sich mit Wahrscheinlichkeit 3/4 im Triplett-Zustand und mit Wahrscheinlichkeit 1/4 im Singlett-Zustand. Der gesamte Wirkungsquerschnitt ist also gegeben als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4}|f_k(\Theta) - f_k(\pi - \Theta)|^2 + \frac{1}{4}|f_k(\Theta) + f_k(\pi - \Theta)|^2, \tag{L.7}$$

und für den Fall $\Theta = \pi/2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}|2f_k(\Theta)|^2 = |f_k(\pi/2)|^2, \tag{L.8}$$

Für unterscheidbare Teilchen ergäbe sich wie oben bereits erwähnt ein Querschnitt von $2|f_k(\pi/2)|^2$. Man sieht also, dass Streuexperimente eine gute Möglichkeit darstellen, Spin-Statistiken zu überprüfen - obwohl der Streuhamiltonian selbst Spin-Unabhängig ist, erzeugen die jeweiligen Symmetriebedingungen an die Wellenfunktion ein unterschiedliches Streuverhalten der Teilchen.

Übung 2. *Gekoppelte Anyonen*

Wir betrachten zwei gekoppelte identische Teilchen in 2D. Die Schwerpunktbewegung wird vernachlässigt und die Relativbewegung wird durch die Schrödingergleichung

$$E\Psi(r,\phi) = H\Psi(r,\phi) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + V(r)\right]\Psi(r,\phi) \tag{1}$$

beschrieben, wobei $V(r)$ für einen Potentialterm steht, der lediglich von der relativen Distanz zwischen den beiden Teilchen abhängt.

(a) Leite die oben angegebene Form für H her.

Lösung: Mit einem Potential, das nur von der relativen Distanz der beiden Teilchen abhängt, können wir den Hamiltonian schreiben als

$$H = p^2/2m + V(r). \tag{L.9}$$

Wenn wir nun p^2 in Polarkoordinaten ausdrücken wollen, benötigen wir die Relationen:

$$x = r\cos\phi \tag{L.10}$$

$$y = r\sin\phi \tag{L.11}$$

Dadurch erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \tag{L.12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} \tag{L.13}$$

Damit ergibt sich dann

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\phi \tag{L.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = -r\sin\phi\frac{\partial F}{\partial x} + r\cos\phi\frac{\partial F}{\partial y} \tag{L.15}$$

und daraus folgen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r}\left[r\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial r} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right] \tag{L.16}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r}\left[r\sin(\phi)\frac{\partial}{\partial r} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right]. \tag{L.17}$$

$$p^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tag{L.18}$$

$$= -\hbar^2 \left[(\frac{\partial}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r} \sin\phi \frac{\partial}{\partial \phi})^2 + (\frac{1}{r} \cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi})^2 - (\frac{1}{r} \sin\phi \frac{\partial}{\partial \phi})(\cos\phi \frac{\partial}{\partial r}) + (\frac{1}{r} \cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi})(\sin\phi \frac{\partial}{\partial r}) \right] \tag{L.19}$$

$$= -\hbar^2 \left[(\frac{\partial}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r^2} \sin^2\phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}) + (\frac{1}{r^2} \cos^2\phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}) + (\frac{1}{r} \sin^2\phi \frac{\partial}{\partial r}) + (\frac{1}{r} \cos^2\phi \frac{\partial}{\partial r}) \right] \tag{L.20}$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \tag{L.21}$$

.

Damit erhalten wir für H wie gewünscht:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + V(r) \tag{L.22}$$

(b) Finde die irreduziblen Darstellungen der Gruppe SO(2) auf dem zu H gehörenden Hilbertraum. Was fällt auf im Vergleich zu den aus der Vorlesung bekannten Darstellungen von SO(3)?
Wie auch schon im 3-dimensionalen Fall wollen wir in der QM die Wirkung der Drehgruppe SO(2) eigentlich nur bis auf eine Phase bestimmen und interessieren uns daher für die projektiven Darstellungen der Symmetriegruppe - wie lauten diese? Vergleiche mit den projektiven Darstellungen in drei Dimensionen (unter der relevanten Gruppe SO(3)).

Lösung: Die Gruppe SO(2) ist abelisch und somit sind alle irreduziblen Darstellungen eindimensional. Eine Rotation $R(\theta)$ transformiert die Koordinaten (r, ϕ) selbst wie folgt:

$$r \to r \tag{L.23}$$

$$\phi \to \phi + \theta \tag{L.24}$$

Auf unserem Hilbertraum ergibt sich also ein Generator, der J_z in drei Dimensionen entspricht:

$$R(\theta) = e^{i\theta J} \tag{L.25}$$

mit

$$J = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{L.26}$$

Für die Eigenfunktionen des Generators ψ_l gilt also jeweils

$$R(\theta)\psi_l(r, \phi) = e^{il\theta} \psi_l(r, \phi). \tag{L.27}$$

Da in einer irreduziblen echten Darstellung von SO(2) eine Rotation um 2π die Wellenfunktion invariant lassen muss, gilt zusätzlich die Bedingung

$$R(2\pi)\psi_l(r, \phi) = \psi_l(r, \phi). \tag{L.28}$$

Dies ist für alle ganzzahligen l erfüllt. Damit sind die irreduziblen Darstellungen von SO(2) genau alle ψ_l mit ganzzahligem l.

Wenn wir nun statt der Bedingung (L.28) nur noch invarianz bis auf eine Phase fordern, uns also für die projektiven Darstellungen der Gruppe interessieren, sind plötzlich alle Darstellungen für reellwertige l erlaubt. Im Falle von drei Dimensionen war das Ergebnis, dass die projektiven Darstellungen von SO(3) den irreduziblen Darstellungen der Gruppe SU(2) entsprechen, und wir statt ganzzahligem Spin auch halbzahligen Spin erhalten können. In 2-dimensionen kann l statt dessen beliebige reelle Zahlen annehmen! Das liegt genau daran, dass die Darstellungen jetzt alle eindimensional sind, und es für SO(2) nur noch 1 Generator gibt. Die Kommutationsrelationen, die wir aus SO(3) für die Generatoren kennen, sind also nicht mehr relevant. Genau diese Kommutationsrelationen waren in SO(3) allerdings der Grund für die Quantisierung des Spins in halbzahlige Werte.

(c) Für die Eigenfunktionen des Drehoperators gilt offensichtlich, dass

$$\Psi_l(r, \phi + \theta) = e^{il\theta}\Psi_l(r, \phi). \tag{2}$$

Wir betrachten nun zuerst, wie sich die uns bereits bekannten Bosonen und Fermionen (also Darstellungen von SO(3) mit ganz- und halbzahligem Spin) in diesem System verhalten, bevor wir uns in der nächsten Teilaufgabe den neuen Teilchen widmen, die die Gruppe SO(2) durch ihre projektiven Darstellungen zulässt (Anyonen).
Welche Werte von l sind also hier für Bosonen und Fermionen möglich, wenn man zusätzlich noch annimmt, dass die Spinwellenfunktion χ gerade ist unter Vertauschung der Teilchen?

Lösung: Für Bosonen muss die Wellenfunktion symmetrisch sein unter Vertauschung der Teilchen. Das bedeutet, dass sich für $\Theta = \pi$ in der Phase ein gerades Vielfaches von π ergeben muss. Deshalb haben wir in diesem Fall $l = 2n$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$.
Für Fermionen ist die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch. Mit symmetrischem Spinanteil ist die räumliche Wellenfunktion damit antisymmetrisch - dies entspricht einem ungeraden Vielfachen von π in der Phase. Das erhalten wir durch $l = 2n + 1$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

(d) In der Aufgabe a) haben wir gelernt, dass der Spin in 2D nicht wie in 3D 2l+1-dimensionalen Darstellung entspricht und nur quantisierte Werte annehmen kann, sondern einer 1 dimensionalen Darstellung entspricht und dass er beliebige Werte $\nu \in \mathbb{R}$ annehmen kann. Für Bosonen wollten wir, dass die Wellenfunktion unter Austausch der Teilchen invariant bleibt. Für Fermionen gab es die Forderung, dass die Wellenfunktion ein Minuszeichen erhält. Für Anyonen ($\nu \notin \mathbb{Z}$) lautet die Randbedingung statt dessen nur folgendermassen:

$$\Psi_\nu(r, \phi + \pi) = e^{i\nu\pi}\Psi_\nu(r, \phi). \tag{3}$$

Erzeugt diese Funktion auch eine echte irreduzible Darstellung von SO(2)? Wie verhält sich diese Lösung bezüglich der Gruppe S_2?

Lösung: Diese Lösung erzeugt keine echte Darstellung von SO(2), sondern nur eine projektive, da $\nu \notin \mathbb{Z}$ und somit eine Rotation um 2π nicht zusammenziehbar auf die Identität ist. Die Gruppe S_2 besteht aus e und g mit:

$$e^2 = g^2 = e \tag{L.29}$$
$$eg = ge = g. \tag{L.30}$$

Wenn g dem Austausch der Teilchen entspricht, dann haben wir hier die erste Bedingung nicht gegeben, da zwei Rotationen um π nicht der Identität sondern einer Phasenverschiebung mit $e^{2\pi\nu}$ entsprechen. Wir sehen daran also, dass die Symmetriegruppe SO(2) Teilchen mit neuer, "anyonischer" Statistik erlaubt.

Übung 3. *Zweite Quantisierung*

(a) Zeige, dass der fermionische Besetzungszahl-Operator $\hat{n} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ zwei Eigenwerte haben kann: 0 und 1. Hier sind $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit den aus der Vorlesung bekannten Antikommutationsrelationen.

Lösung: Für den Operator $\hat{b}^\dagger$ gilt $\{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0$, und damit $\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger = 0$. Für den Grundzustand unseres Fockraums gilt die Bedingung $\hat{b}\,|0\rangle = 0$; dieser Zustand ist also Eigenzustand von $\hat{n}$ mit Eigenwert 0. Einmalige Anwendung von $b^\dagger$ auf diesen Zustand ergibt $|1\rangle = \hat{b}^\dagger\,|0\rangle$. Wie sich leicht nachprüfen lässt, hat dieser Zustand Eigenwert 1 zu $\hat{n}$. Wenden wir allerdings $b^\dagger$ nochmals auf diesen Zustand an, ergibt sich wieder 0 wegen $\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger = 0$. Damit sind 0 und 1 die zwei möglichen Eigenwerte von $\hat{n}$.

(b) Zeige, dass für Bosonen gilt:

(1) $[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}] = \alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$

Lösung:

$$[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}] = [\hat{a}, 1+\alpha\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}(\alpha\hat{a}^\dagger)^2 + ...] = 0 + [\hat{a}, \alpha\hat{a}^\dagger] + \frac{1}{2}[\hat{a}, \alpha^2(\hat{a}^\dagger)^2] + ... = \alpha(1+\alpha\hat{a}^\dagger + ...) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger} \quad \text{(L.31)}$$

(2) $e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = \hat{a} + \alpha$

Lösung:

$$e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a} + e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}] = \hat{a} + e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\alpha = \hat{a} + \alpha \quad \text{(L.32)}$$

wobei $\hat{a}^\dagger$ der Erzeugungsoperator für Bosonen ist.
Wie lauten die entsprechenden Relationen für Fermionen?

Lösung: Für Fermionen hätten wir analog

$$\{\hat{b}, e^{\alpha\hat{b}^\dagger}\} = \{\hat{b}, 1 + \alpha\hat{b}^\dagger + \frac{\alpha}{2}\hat{b}^{\dagger 2} + ...\} = 2\hat{b} + \alpha, \quad \text{(L.33)}$$

da $\hat{b}^{\dagger 2} = 0$. Anstelle der zweiten Gleichung erhält man dann

$$e^{-\alpha\hat{b}^\dagger}\hat{b}e^{\alpha\hat{b}^\dagger} = -\hat{b}e^{-\alpha\hat{b}^\dagger}e^{\alpha\hat{b}^\dagger} + \{\hat{b}, e^{-\alpha\hat{b}^\dagger}\}e^{\alpha\hat{b}^\dagger} = -\hat{b} + (2\hat{b} - \alpha)e^{\alpha\hat{b}^\dagger} = \hat{b} - \alpha + 2\alpha\hat{b}\hat{b}^\dagger - \alpha^2\hat{b}^\dagger. \quad \text{(L.34)}$$

Hier können wir nun nicht weiter vereinfachen.

(c) Wie lauten die Antikommutationsrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verschiedener fermionischer Zustände? Zeige explizit, dass aus diesen Relationen die Antisymmetrie der fermionischen Wellenfunktionen folgt.

Lösung: Die Antikommutationsrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verschiedener fermionischer Zustände lauten:

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad \text{(L.35)}$$

und

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad \text{(L.36)}$$

Laut (4.2.9) vom Skript ist

$$|\boldsymbol{x}_1, s_1; \ldots \boldsymbol{x}_n, s_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\Psi_{s_n}^\dagger(x_n)\cdots\Psi_{s_1}^\dagger(x_1)\,|0\rangle \ .$$

Aus $\{a_{i,s}^\dagger, a_{j,s'}^\dagger\} = 0$ folgt direkt $\{\Psi_s^\dagger, \Psi_{s'}^\dagger\} = 0$. Wenn jetzt eine Permutation π von den $\boldsymbol{x}_i$ eingeführt wird, dann entsteht ein Minuszeichen pro Transposition, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{x}_{\pi(1)}, s_{\pi(1)}; \ldots \boldsymbol{x}_{\pi(n)}, s_{\pi(n)}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\Psi_{s_{\pi(n)}}^\dagger(x_{\pi(n)})\cdots\Psi_{s_{\pi(1)}}^\dagger(x_{\pi(1)})\,|0\rangle \\
&= \varepsilon(\pi)\frac{1}{\sqrt{n!}}\Psi_{s_n}^\dagger(x_n)\cdots\Psi_{s_1}^\dagger(x_1)\,|0\rangle \\
&= \varepsilon(\pi)\,|\boldsymbol{x}_1, s_1; \ldots \boldsymbol{x}_n, s_n\rangle \ ,
\end{aligned}$$

wobei $\varepsilon(\pi)$ das Vorzeichen der Permutation π ist, d.h. $+1$ wenn die Anzahl Transpositionen, die gebraucht sind um der Permutation auszuführen, gerade ist, und -1 wenn sie ungerade ist.

Die Antisymmetrie der Wellenfunktion folgt aus Ihrer Definition,

$$\psi_{s_1\ldots s_n}(x_1, \ldots x_n) = \langle\boldsymbol{x}_1, s_1; \ldots \boldsymbol{x}_n, s_n|\psi\rangle \ .$$