Übungsserie 5

Abgabe: 30. März 2012

Aufgabe 1 [*Addition von Geschwindigkeiten*]: Die Lorentztransformation, die zwei Inertialsysteme mit Relativgeschwindigkeit v in der x-Richtung miteinander verbindet, ist

$$\hat{t} = \gamma(t - \beta x/c) \quad \hat{x} = \gamma(x - \beta ct) \quad \hat{y} = y \quad \hat{z} = z$$

wobei $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(i) Zeige explizit, dass die sukzessive Anwendung zweier solcher Lorentztransformationen $(x,t) \stackrel{v_1}{\to} (\hat{x},\hat{t})$ und $(\hat{x},\hat{t}) \stackrel{v_2}{\to} (\tilde{x},\tilde{t})$, wobei v_1 und v_2 nur eine x-Komponente haben, wiederum eine Lorentztransformation der obigen Form beschreibt. Bestimme die zugehörige Geschwindigkeit als Funktion von v_1 und v_2.

(ii) Betrachte nun den Fall, dass v_1 nur eine x-Komponente und v_2 nur eine y-Komponente besitzt. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung dieser beiden Lorentzboosts als Hintereinanderschaltung eines Boosts (bzgl. eines gedrehten Koordinatensystems) und einer Drehung geschrieben werden kann. Was sind nun Richtung und Betrag der Relativgeschwindigkeit?

Aufgabe 2 [*Lorentztransformationen der elektromagnetischen Felder*]: In einem Bezugssystem sei $\mathbf{E}_0$ ein statisches homogenes elektrisches Feld, und $\mathbf{B}_0$ ein statisches homogenes Magnetfeld. Das elektrische Feld $\mathbf{E}_0$ ist parallel zur x-Achse, während $\mathbf{B}_0$ in der x-y Ebene liegt und mit der x-Achse einen Winkel θ einnimmt. Weiterhin ist $|\mathbf{B}_0| = 2|\mathbf{E}_0|$.

Bestimme die Relativgeschwindigkeit eines Bezugssystems, in welchem das elektrische und magnetische Feld parallel zueinander sind. Wie gross sind die Feldstärken in diesem Bezugssystem für die Spezialfälle $\theta \to 0$ und $\theta \to (\pi/2)$?

[**Hinweis**: Die Aufgabe kann ohne viel Mehraufwand auch für ein beliebiges Verhältnis λ zwischen $|\mathbf{B}_0| = \lambda|\mathbf{E}_0|$ gelöst werden. Das Zwischenresultat für die Relativgeschwindigkeit lautet dann

$$\beta = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda\sin\theta}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\lambda\sin\theta}{\lambda^2+1}\right)^2}\,\right].]$$

Aufgabe 3 [*Invarianten des elektromagnetischen Feldes*]:

(i) Zeige, dass die beiden Grössen

$$I_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad I_2 = \epsilon_{\mu\nu\tau\sigma}F^{\mu\nu}F^{\tau\sigma}$$

unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen invariant sind. Hier ist $\epsilon_{\mu\nu\tau\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor in 4 Dimensionen mit $\epsilon_{0123} = +1$. Drücke I_1 und I_2 durch die elektrischen und magnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.

(ii) In einem Inertialsystem seien $\mathbf{E}(x)$ und $\mathbf{B}(x)$ orthogonal zueinander. Zeige, dass dies dann in allen Inertialsystemen gilt.

(iii) In einem Inertialsystem sei $\mathbf{E}(x) = 0$ und $\mathbf{B}(x) \neq 0$. Gibt es dann ein Inertialsystem in welchem $\mathbf{B}(x) = 0$ gilt?