Übungsserie 8

Abgabe: 4. Mai 2012

Aufgabe 1 [*Galilei-Invarianz der Schrödinger-Gleichung*]: Sei $\Psi(x,t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen, d.h.

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t).$$

Zeige, dass für eine beliebige Konstante u

$$\Psi_u(x,t) = \Psi(x-ut,t)\exp\left[\frac{im}{\hbar}ux - \frac{im}{2\hbar}u^2t\right]$$

ebenfalls eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ist.

Aufgabe 2 [*Teilchen in einer eindimensionalen Box*]: Betrachte ein Teilchen, dessen Bewegung eindimensional und auf das Intervall $[0,a]$ eingeschränkt ist. Die zugehörigen Energieeigenzustände des Teilchens sind

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),\ n = 1,2,3,\dots\ .$$

(i) Bestimme den Erwartungswert $\langle x\rangle$ sowie die Varianz $\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle$ des Aufenthaltsortes des Teilchens im n-ten Eigenzustand. Zeige weiter, dass man im Limes $n\to\infty$ die klassischen Werte erhält.

[**Hinweis**: Im klassischen Fall wird das Teilchens an beiden Wänden der Box reflektiert und ist damit innerhalb der Box gleichverteilt.]

(ii) Bestimme weiter den Erwartungswert und die Varianz des Impulses p des Teilchens und verifiziere die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta x\cdot\Delta p \geq \hbar/2$ für jeden Energieeigenzustand.

Aufgabe 3 [*Teilchen in einer sich ausdehnenden Box*]: Betrachte wiederum ein Teilchen, dessen Bewegung eindimensional und auf das Intervall $[0,a]$ eingeschränkt ist. Nimm weiter an, dass es sich im niedrigsten (stationären) Energieeigenzustand befindet, wenn die Box instantan zum Zeitpunkt t_0 auf $[0,2a]$ vergrössert wird. Bestimme die Wellenfunktion für $t>t_0$ und zeige, dass diese eine Superposition von Eigenzuständen der Energien

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2},\ n=2 \text{ sowie } n = 1,3,5\dots$$

ist. Zeige weiter, dass das Teilchen nach der Vergrösserung der Box mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ dieselbe Energie wie davor besitzt.