Übungsserie 10

Abgabe: 22. Mai 2012

Aufgabe 1 [*Weyl'sche Darstellung der QM*]:

(i) Ausgehend von $[x,p] = i\hbar$ zeige, dass

$$e^{iap/\hbar}\, x\, e^{-iap/\hbar} = x + a \ .$$

(ii) Falls $f(x)$ eine Funktion ist, die sich als Potenzreihe entwickeln lässt, folgere, dass

$$e^{iap/\hbar}\, f(x)\, e^{-iap/\hbar} = f(x + a) \ .$$

(iii) Beweise die Weyl'sche Form der Vertauschungsregeln

$$e^{iap/\hbar}\, e^{ibx/\hbar} = e^{iba/\hbar}\, e^{ibx/\hbar}\, e^{iap/\hbar} \ .$$

Aufgabe 2 [*Drehimpuls*]: Wir definieren den Drehimpulsoperator durch

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \ ,$$

bzw. in Komponenten

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k \ ,$$

wobei über wiederholte Indizes ($j, k = 1, 2, 3$) summiert wird.

(i) Unter Benutzung der Vertauschungsregel $[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$ berechne die Kommutatoren von L_i, und zeige, dass sie die Form

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k \tag{1}$$

haben.

(ii) Mit Hilfe von (1) zeige, dass

$$[\mathbf{L}^2, L_j] = 0 \qquad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

Die gemeinsamen Eigenzustände zu $\mathbf{L}^2$ und L_3 bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2\, |l,m\rangle &= \hbar^2 l(l+1)\, |l,m\rangle && (1) \\ L_3 |l,m\rangle &= \hbar m\, |l,m\rangle \ . && (2) \end{aligned}$$

(iii) Berechne den Kommutator $[L_3, L_1 L_2 + L_2 L_1]$ und zeige, dass die Erwartungswerte von L_1^2 und L_2^2 bezüglich $|l,m\rangle$ durch

$$\langle l,m|L_1^2|l,m\rangle = \langle l,m|L_2^2|l,m\rangle = \frac{1}{2}\hbar^2\,[l(l+1) - m^2]$$

gegeben sind.

[**Hinweis**: Sei $\mathbf{A}$ ein selbstadjungierter Operator und ψ ein Eigenzustand von $\mathbf{A}$, dann gilt für jeden Operator $\mathbf{B}$

$$\langle\psi|[\mathbf{A},\mathbf{B}]|\psi = 0\ .]$$

Aufgabe 3 [*Darstellungen von su(2)*]: Seien $a_\pm^\dagger$ und $a_\pm$ zwei Paare von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, also

$$[a_+, a_+^\dagger] = [a_-, a_-^\dagger] = 1\ ,$$

während alle anderen Kommutatoren verschwinden. Wir definieren die Operatoren

$$J_3 = \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)\ , \qquad J_+ = a_+^\dagger a_-\ , \qquad J_- = a_-^\dagger a_+\ .$$

(i) Zeige, dass diese Operatoren die Relationen von su(2) erfüllen, also

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm\ , \qquad [J_+, J_-] = 2J_3\ .$$

(ii) Berechne $\mathbf{J}^2 = J_3^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$ und zeige, dass es mit $\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)$ übereinstimmt, wobei $N = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-$ der Gesamtzahloperator ist.

(iii) Wir bezeichnen mit $|n_+, n_-\rangle$ die Eigenzustände der Zahloperatoren $N_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm$ mit Eigenwert $n_\pm$. Zeige, dass

$$\begin{aligned}
J_+|n_+, n_-\rangle &= \sqrt{n_-(n_+ + 1)}|n_+ + 1, n_- - 1\rangle \\
J_-|n_+, n_-\rangle &= \sqrt{n_+(n_- + 1)}|n_+ - 1, n_- + 1\rangle \\
J_3|n_+, n_-\rangle &= \frac{1}{2}(n_+ - n_-)|n_+, n_-\rangle\ .
\end{aligned}$$

(iv) Zeige, dass diese Operatoren die übliche Form annehmen, vorausgesetzt wir machen die Identifikationen

$$j = \tfrac{1}{2}(n_+ + n_-)\ , \qquad m = \tfrac{1}{2}(n_+ - n_-)\ .$$

Folgere daraus, dass wir die Zustände wie folgt identifizieren können

$$|j, m\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}\,(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0, 0\rangle\ .$$