Übungsserie 11

Abgabe: 29. Mai 2012

Aufgabe 1 [*Pauli-Matrizen*]: In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass

$$U(\omega, \mathbf{n}) = \exp\left(-i\,\frac{\omega}{2}\,n_i\sigma^i\right) \in \mathrm{SU}(2)\,, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3\,, \quad |\mathbf{n}| = 1\,,$$

einer Rotation mit dem Winkel ω um die durch $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ definierte Achse entspricht.

(i) Zeige die Relation

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\ ,$$

wobei die Pauli-Matrizen σ^i durch

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

(ii) Beweise nun, dass sich $U(\omega, \mathbf{n})$ wie folgt schreiben lässt:

$$U(\omega, \mathbf{n}) = \cos(\tfrac{\omega}{2})\,\mathbf{1}_2 - i\sin(\tfrac{\omega}{2})(n_i\sigma^i)\,.$$

(iii) Mit Hilfe des Isomorphismus $\mathrm{SU}(2)/\{\pm\mathrm{id}\} \simeq \mathrm{SO}(3)$ zeige, dass $U(\omega, \mathbf{n})$ in der Tat einer Rotation mit dem Winkel ω um die durch $\mathbf{n}$ definierte Achse entspricht. [**Hinweis**: Berechne $\tilde{x}' = U(\omega, \mathbf{n})\,\tilde{x}\,U^\dagger(\omega, \mathbf{n})$, wobei $\tilde{x} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ die zu $x \in \mathbb{R}^3$ assoziierte 2×2 Matrix ist.]

Insbesondere folgt also, dass eine Rotation um 2π (die eine triviale Abbildung in SO(3) definiert) einem nicht-trivialen Gruppenelement in SU(2) entspricht. Eine Rotation um 4π ist hingegen sowohl in SO(3) als auch in SU(2) trivial.

Aufgabe 2 [*Spinoren*]:

(i) Sei $\vec{e}$ ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$. Ein Spin-1/2-Teilchen ist in dem Zustand χ mit Erwartungswert

$$\langle \chi\,|\,\vec{\sigma}\,|\,\chi \rangle = \vec{e}\ ,$$

wobei $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$. Berechne χ.

(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung der z-Komponente des Spin Operators S_z im Zustand χ den Wert $\hbar/2$ zu finden? [**Hinweis**: Der Spin Operator ist durch $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}$ gegeben.]

Aufgabe 3 [*Spin-Spin-Kopplung*]: Der Hamilton-Operator eines Systems zweier Spin-1/2-Teilchen ist gegeben durch

$$H = A + B\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + C(S_{1,z} + S_{2,z}) \ .$$

Was sind die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von H?

[**Hinweis**: Benutze die Identität

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left[(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2\right].]$$