Theoretische Physik, Übung 12.

FS13 *Abgabe: 21.05.13*

1. Zerfliessen eines Wellenpakets

Berechne die zeitliche Evolution $\psi(\vec{x}, t)$ eines freien Teilchens im $\mathbb{R}^3$ mit Anfangszustand $(t = 0)$

$$\psi(\vec{x}) = \mathrm{e}^{-\vec{x}^2/4\Delta^2} \; .$$

Wie gross ist die Breite $\Delta(t)$ des Wellenpakets zur Zeit t?

Hinweise: (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \mathrm{e}^{-(ax^2+bx)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{b^2/4a}$$

für $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$; $\sqrt{a}$ ist dabei eindeutig festgelegt durch $\mathrm{Re}\sqrt{a} > 0$. (b) Berechne die Fouriertransformierte von ψ. Der Propagator $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH/\hbar}$ des freien Teilchens ($H = p^2/2m$) ist im Impulsraum einfacher dargestellt als im Ortsraum.

2. Transfer- und Streumatrix

Ein Teilchen der Energie $E = k^2$, ($\hbar = 2m = 1$) trifft in einer Dimension auf einen Streuer im Intervall $[a, b]$, gegeben durch ein Potential V und ein Vektorpotential A mit

$$V(x) = 0 \; , \; A(x) = 0 \quad \text{für } x \le a \text{ oder } x \ge b. \tag{1}$$

Es wird durch Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$\big(-\mathrm{i}\frac{d}{dx} - A(x)\big)^2 \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \; , \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

beschrieben.

Bemerkung: Die Einführung des Vektorpotentials ändert zwar das Problem nicht, da es in Dimension 1 weggeeicht werden kann ($A(x) = \chi'(x)$); es sorgt aber im Folgenden für die passende Allgemeinheit, s. Teilaufgabe (vi)).

i) Zeige: Lösungen erfüllen die Stromerhaltung $j'(x) = 0$, wobei

$$j(x) = 2\,\mathrm{Im}\big(\overline{\psi(x)}(\psi'(x) - \mathrm{i}A(x)\psi(x)\big) \; .$$

Bemerkung: Dies ist die Stromerhaltung (8.16), verallgemeinert auf $A \neq 0$ und spezialisiert auf den stationären Fall und auf Dimension 1.

ii) Die Lösungen sind ausserhalb des Intervalls von der Form

$$\psi(x) = \begin{cases} a_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \; , & (x \le a) \\ a'_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a'_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \; , & (x \ge b) \; . \end{cases}$$

Man überlege sich, dass $a_\pm$ durch $a'_\pm$ linear bestimmt sind:

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = T(E) \begin{pmatrix} a'_+ \\ a'_- \end{pmatrix} \; , \tag{3}$$

($T = T(E)$ heisst *Transfermatrix*); man zeige, dass

$$T^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Hinweis: Verwende (i).

iii) Eine von links einfallende Welle ist von der Form

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} , & (x \le a) \\ t\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} , & (x \ge b) , \end{cases} \tag{5}$$

mit Reflexions- r bzw. Transmissionsamplitude t. Ebenso für eine Welle von rechts:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} t'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} , & (x \le a) \\ r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} , & (x \ge b) . \end{cases} \tag{6}$$

Die *Streumatrix* ist definiert als

$$S(E) = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass $S = S(E)$ unitär ist, d.h. dass die Spalten orthonormiert sind:

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 = |r'|^2 + |t'|^2 , \qquad \bar{r}t' + \bar{t}r' = 0 . \tag{7}$$

(insbesondere $R + T = 1$ für $R = |r|^2$, $T = |t|^2$, vgl. Übung 10.1). *Hinweis:* Wende (4) als quadratische Form auf geeignete Vektoren an.

iv) Bestimme den Zusammenhang zwischen den Einträgen der Matrizen S und T (in beide Richtungen). *Hinweis:*

$$\begin{pmatrix} a_- \\ a'_+ \end{pmatrix} = S(E) \begin{pmatrix} a_+ \\ a'_- \end{pmatrix} . \tag{8}$$

v) Betrachte zwei Streuer wie in (1), unterschieden durch die Indizes 1 und 2. Der erste liege links vom zweiten: $b_1 < a_2$. Drücke die Streumatrix des zusammengesetzten Streuers (Potentiale $V_1 + V_2, A_1 + A_2$) durch die der einzelnen aus.

vi) Sei nun $A(x) \equiv 0$. Zeige, dass $\det T = 1$, bzw. S symmetrisch ist. *Hinweis:* Mit $\psi(x)$ ist auch $\overline{\psi(x)}$ eine Lösung von (2).