Theoretische Physik, Übung 9.

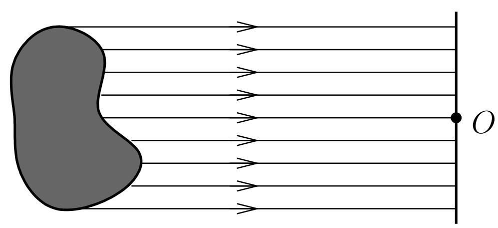
FS13 *Abgabe: 30.04.13*

1. Sehen ist nicht Messen

Populärwissenschaftliche Darstellungen (z.B. Gamow 1940) der Speziellen Relativitätstheorie behaupten, bewegte Objekte erschienen verzerrt infolge der Lorentz-Kontraktion in Bewegungsrichtung und deren Ausbleiben transversal dazu. Dies trifft so nicht zu (Penrose, Terrell 1959; s. auch Kraus und Borchers[1] 2005).

Eine gemessene Länge ist nicht dasselbe wie eine gesehene Länge. So besteht die Längenmessung in der (bzgl. eines Bezugssytems) gleichzeitigen Koordinatendifferenz zweier Punkte eines Objekts (s. Aufgabe 7.1(b)). Das Sehen hingegen beruht auf Lichtsignalen, die gleichzeitig empfangen werden. Das Bild vereint somit frühere, entferntere Ereignisse mit späteren, aber näheren. Zwar erscheint ein bewegtes Objekt kürzer als ein identisches, ruhendes an derselben Stelle im Bild; aber nicht verzerrt, sondern gedreht, d.h. so, wie ein mitbewegter Beobachter es aus einem geeigneten Blickwinkel (vgl. Aberration, Aufgabe 8.1(c)) auch sehen könnte; dieser würde die Verkürzung rein perspektivisch deuten. Die untenstehende Behauptung ermöglicht, dies zu verstehen. Einschränkend ist zu sagen, dass (i) Obiges nur im Kleinen gilt: Die massgebende Transformation der Sichtrichtungen ist Möbius (s. Aufgabe 7.2) und somit winkeltreu; bewegte Objekte, die aber einen grossen Teil des Sichtfelds einnehmen, erscheinen verzerrt; (ii) ihre Farbe und Helligkeit sind verändert.

Man betrachte einen Beobachter O, der paralleles Licht vom Objekt auf eine dazu senkrechte Fotoplatte zur Zeit $t = 0$ einfallen lässt. (Ein Fotoapparat, der auf ein entferntes Objekt gerichtet wird, liefert dasselbe Bild bis auf die Skalierung.)



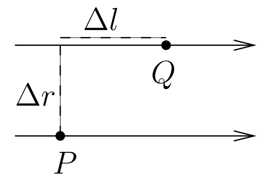
Ein zweiter Beobachter O', mit gemeinsamem Ursprung $(t, \vec{x}) = (0, 0) = (t', \vec{x}\,')$ zu O, aber zueinander bewegt, tut dasselbe zur Zeit $t' = 0$. (Bemerkung: wegen der Aberration liegen die Platten von O und O' i.A. nicht parallel.) Behauptung: Beide erhalten dasselbe Bild. Insbesondere gibt es darin keine Längenkontraktion.

Zur Herleitung: Das Bild entsteht durch gleichzeitiges Auffangen nebeneinander fliegender "Lichtteilchen" (oder zumindest kann man sich das so vorstellen). Die Behauptung folgt somit aus folgenden, zu begründenden Feststellungen:

Parallele Trägheitsbahnen werden unter Lorentz-Transformationen in ebensolche abgebildet. Die Eigenschaft von Lichtteilchen, nebeneinander zu fliegen ($\Delta l = 0$ in der Figur), ist Lorentz-invariant. Falls sie zutrifft, ist ihr räumlicher Abstand Δr Lorentz-invariant.

[1] www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/109926451/PDFSTART

Hinweis: Zwei Lichtteilchen P, Q mögen verschoben fliegen. Betrachte zwei Ereignisse $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, die den Teilchen P, bzw. Q widerfahren (z.B. auf die Platte zu stossen). Wie hängt $(\mathcal{P}-\mathcal{Q},\mathcal{P}-\mathcal{Q})$ von derer Zeitdifferenz Δt ab?



2. Relativistischer Zerfall

Betrachte den Zerfall $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ eines Pions π^+ in ein Myon μ^+und ein Neutrino ν, wobei die Massen m_π, $m_\mu > 0$ und $m_\nu = 0$ bekannt sind.

i) Man zeige: Die totale Energie des Myons μ^+ im Ruhesystem des Pions π^+ ist

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 \ .$$

ii) Das Pion habe im Laborsystem die Energie $E'_\pi \gg m_\pi c^2$ und das Neutrinos ν bewegt sich in der Flugrichtung des zerfallenden Pions. Zeige: Seine Energie E'_ν ist

$$E'_\nu \approx \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2} E'_\pi \ .$$

3. Das Ritzsche Kombinationsprinzip

Die Gesamtheit der Spektrallinien (Spektrum) eines beliebigen Atoms oder Moleküls weist folgende Eigenschaft auf (Ritz 1908): Gewisse Summen und Differenzen von Frequenzen liegen selbst wieder im Spektrum. Genauer: Die Frequenzen können mit zwei Indizes $n \neq n'$ versehen werden, derart dass

$$\omega_{nn'} + \omega_{n'n''} = \omega_{nn''} \ , \qquad \omega_{nn'} = -\omega_{n'n} \ , \tag{1}$$

wobei die zweite Gleichung den Fall der Differenzen in die erste miteinbezieht.

Zeige: Falls die $(\omega_{nn'})_{n,n' \in I}$ Gl. (1) erfüllen, so sind sie von der Form

$$\omega_{nn'} = \omega_n - \omega_{n'} \ , \qquad (n, n' \in I) \ .$$

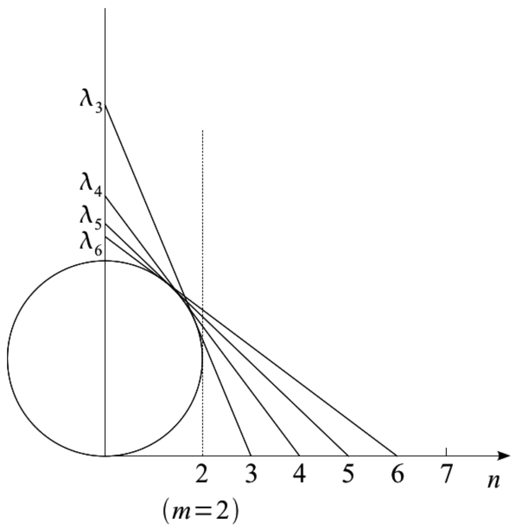
(Die Umkehrung ist trivial.) Deutung: Das Atom existiert in Zuständen n und die Linien $\omega_{nn'}$ sind Ausdruck eines Übergangs $n \to n'$.

4. Wie Balmer zur Formel kam

Diese Aufgabe ist nicht mehr als eine verzichtbare Kuriosität zum Ursprung der Formel

$$\omega_{mn} \propto \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \tag{2}$$

$(n, m = 1, 2, \ldots, n > m)$ für die Spektrallinien des H-Atoms. Der Mathematik- und Zeichenlehrer Balmer trug die beobachteten Wellenlängen $\lambda_n = \lambda_{mn}$ für $m = 2$, $n = 3, 4, 5, 6$ als Strecken auf einer Geraden ab (vertikal in der Figur). In der resultierenden Anordnung erkannte er folgende geometrische Konstruktion wieder:



Sie war ihm bekannt, weil sie die Grösse λ_n einer kreisförmigen Säule und deren Durchmesser $2m$ aus der Perspektive eines Betrachters im Abstand n in Verbindung bringt.

Zeige, dass die Konstruktion mit (2) übereinstimmt, und verallgemeinere sie dabei gleich auf beliebiges, aber festes m.