Kontinuumsmechanik
Serie 1

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 1.1 Sturzfaktor

1. Bei einem Sturz beim Klettern ist die Belastung des Körpers, d.h. die maximale erfahrene Kraft, überraschenderweise nicht von der Fallhöhe, sondern vom Verhältnis der Fallhöhe h und der Länge l des ausgegebenen Seils abhängig. Zeige dies und bestimme die Art der Abhängigkeit vom Sturzfaktor h/l. Nehme dazu an, dass das Seil elastisch mit Elastizität C sei.

2. Ein Seilhersteller unterzieht sein Seil vor dem Verkauf verschiedenen Tests. Standardmässig sind das folgende:

   - Ein Gewicht von 80kg wird an ein Seil gehängt und die relative statische Ausdehung $\Delta l_s/l$ gemessen. Bei einem Beispielprodukt von Mammut wird diese Grösse mit 7% angegeben.
   - Mit einem Gewicht von 80kg wird ein "Standardsturz" durchgeführt, d.h. ein Sturz mit fester Fixierung des Seils und einem Sturzfaktor von 1.75. Dabei wird die maximale Elongation ($\Delta l/l = 30\%$) und die maximale ausgeübte Kraft ($F_{\text{max}} = 8.8\text{kN}$) gemessen.

   Extrahiere aus den beiden Experimenten eine statische (dynamische) Elastizität C_s (C_d) und vergleiche nun die gemessenen Grössen mit unserem Modell. Geht die Rechnung auf? Diskutiere die Unterschiedlichen Ergebnisse.

Aufgabe 1.2 Masse an zwei elastischen Seilen

Eine Masse m sei an zwei masselosen elastischen Seilen der Länge l an zwei gegenüberligenden Punkten aufgehängt (siehe Abb. 1). Die Ruhelage der Seile ohne Gewicht sei die Horizontale (ohne innere Spannung). Bestimme den Winkel α der Auslenkung in Abhängigkeit der Masse m und ermittle die Kraft auf die Aufhängungspunkte. Hinweis: Man gehe von kleinen Auslenkungen aus.

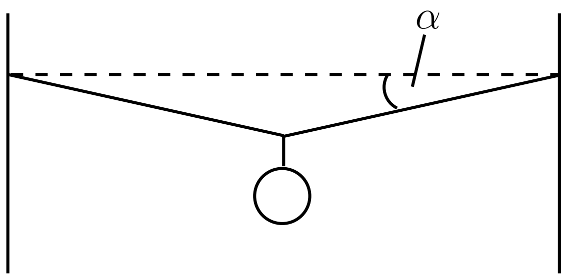

Abbildung 1: Ein Körper an zwei masselosen, elastischen Seilen.

Aufgabe 1.3 Aquädukt

Wir wollen eine Brücke der Höhe h bauen, die von einem Bogen gestützt wird und aus losem Material (also keine Scherkräfte) besteht, siehe Abb. 2. Für den Bau des Bogens wollen wir masselose Bausteine benützen und diese nicht gegeneinander fixieren. Welche Form müssen wir für den Bogen wählen?

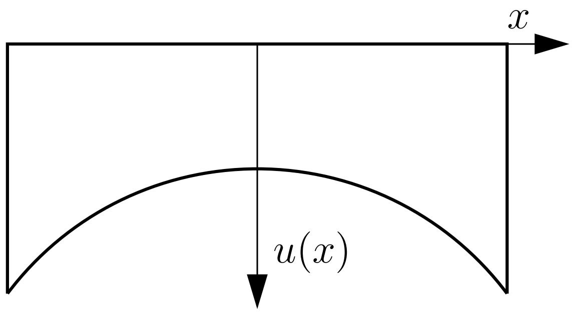

Abbildung 2: Illustration der Brücke aus Aufgabe 1.3.

Aufgabe 1.4 Seilspringen*

Stelle die Bestimmungsgleichung für ein rotierendes Seil auf.

Aufgabe 1.5 Differentiale in Zylinderkoordinaten

Zeige, dass der Gradient und der Laplaceoperator, angewandt auf eine Skalarfunktion $\Psi(r, \varphi, z)$, sowie die Divergenz und die Rotation, angewandt auf eine Vektorfunktion $\mathbf{A}(r, \varphi, z)$, in Zylinderkoordinaten wie folgt geschrieben werden können:

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathbf{e}_z, \tag{1}$$

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\nabla\wedge\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z. \tag{4}$$