Kontinuumsmechanik
Serie 2

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 2.1 Bathyscaph (Tiefsee-U-Boot)

Wir modellieren die Kabine von einem Bathyscaph durch eine dickwändige Sphäre, einfachheitshalber ohne jegliche Öffnungen. Den äusseren Radius bezeichnen wir mit R_a und den inneren mit R_i. Finde den Spannungstensor $\bar{\bar{\sigma}}$ für einen hydrostatischen Aussenüberdruck p_h.
Um die benötigte Mächtigkeit der Wand zu bestimmen, benutze das semi-empirische *von Mises* Kriterium für die Elastizitätsgrenze eines Materials,[1]

$$\sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{Spur}\,(\bar{\bar{\tau}}^2)} < \sigma_{\text{Fliessgrenze}}, \qquad \text{mit } \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}\sigma_{ll}, \tag{1}$$

wo $\sigma_{\text{Fliessgrenze}}$ eine Materialkonstante ist, und $\bar{\bar{\tau}}$ den anisotropischen Teil von dem Spannungstensor bezeichnet.
Kann eine Stahlkabine ($\rho_{\text{Stahl}} \approx 7850$ kg.m^{-3}, $\sigma_{\text{Fliessgrenze für Stahl}} \approx 690$ MPa), die dem Überdruck im Marianengraben ($h \approx 11\,\text{km}$) widerstehen kann,[2] genügend Auftrieb haben, um auf der Wasseroberfläche zu schwimmen?

Aufgabe 2.2 Freie Energiedichte des hexagonalen Kristalls

Unter einer isothermen Deformation schreibt sich die freie Energiedichte eines Kristalls in allgemeinster Form als

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}. \tag{2}$$

Zeige, dass im Falle des hexagonalen Kristalls (siehe Abb.(1)) nur fünf unabhängige Elastizitätsmoduln λ_j, $j = 1, ...5$ nicht verschwinden und (2) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} F_{\text{hex}} =& \lambda_1 u_{zz}^2 + \lambda_2(u_{xx}+u_{yy})^2 + \lambda_3[(u_{xx}-u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] \\ &+ \lambda_4(u_{xx}+u_{yy})u_{zz} + \lambda_5(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Benutze dazu die Symmetrien des hexagonalen Gitters analog zu den Beispielen des tetragonalen und des kubischen Kristalls im Skript. Was kann über die Winkelabhängigkeit in der xy-Ebene ausgesagt werden? Welche Konsequenzen hat dies für das zweidimensionale hexagonale System?

Aufgabe 2.3 Poissonzahl in 2D*

Die Poissonzahl σ ist in 3D gegeben durch

$$\sigma^{3D} = \frac{1}{2}\frac{3K^{3D} - 2\mu^{3D}}{3K^{3D} + \mu^{3D}}, \tag{4}$$

wobei K^{3D} den (normalen, 3-dimensionalen) Kompressionsmodul und μ^{3D} den (normalen, 3-dimensionalen) Schermodul bezeichnet. Leite die entsprechende Formel für den 2-dimensionalen Fall ab – finde also die Abhängigkeit σ^{2D} von K^{2D}, μ^{2D}.

[1] Eine theoretische Einleitung in die Problematik der Materialfestigkeit wird in der Vorlesung später erwähnt.

[2] Vernachlässige die (geringe) Kompressibilität vom Wasser.

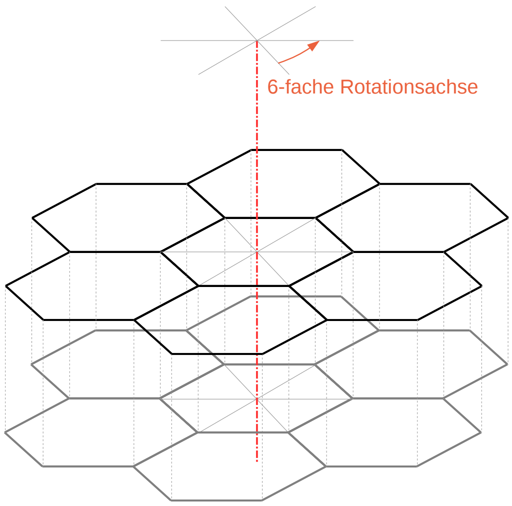

Abbildung 1: Zwei Schichten von einem hexagonalen Kristall mit 6-facher Rotationsachse.