Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuumsmechanik
Serie 10

FS 14
PD Dr.
V.B. Geshkenbein

Aufgabe 10.1 Fluss durch ein Rohr mit ringförmigem Querschnitt

Bestimme das Geschwindigkeitsfeld und den Fluss einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit im Zwischenraum zweier koaxialen Zylindern mit Radien R_1 und $R_2 > R_1$ in Anwesenheit eines Druckunterschiedes Δp pro Rohrlänge l.

Aufgabe 10.2 Energie-Dissipation in einer Flüssigkeit

Betrachte nun den Fall, dass sich (im System von Aufgabe 1) der innere Zylinder mit Geschwindigkeit u entlang seiner Achse fortbewegt. Der Druck entlang des Rohres sei konstant. Bestimme die Bewegung der Flüssigkeit im Zwischenraum $R_1 < r < R_2$ und die durch die Bewegung hervorgerufene Energie-Dissipation.

Aufgabe 10.3 Oszillierende Wand

Betrachte eine inkompressible Flüssigkeit, welche einen Halbraum einnimmt, der durch eine unendlich ausgedehnte Ebene begrenzt wird. Diese Ebene führt eine harmonische Oszillation mit Frequenz ω parallel zu ihrer Oberfläche aus. Berechne die Reibungskraft der Flüssigkeit auf die Oberfläche. Nimm an, dass die Volumenkräfte absent sind.

Aufgabe 10.4 Numerische Lösung eines stationären 2-dimensionalen inkompressiblen und viskosen Stroms*

In dieser Aufgabe suchen wir nach einem stationären 2-dimensionalen inkompressiblen viskosen Strom durch eine gerade abgegrenzte Flüssigkeitsleitung, in welchem sich eine rechteckige Barriere befindet, siehe Abb.(1). Daher ist die Navier–Stokes Gleichung zusammen mit der Kontinuitätsgleichung zu lösen,

$$\cancel{\partial_t \mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \qquad \text{und} \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Diese nicht-triviale hydrodynamische Aufgabe lösen wir mittels Numerik. Dazu geben wir zur Verfügung Skelett von dem Musterprogramm, wo lediglich die Randbedingungen und die diskretisierte Gleichungen zu ergänzen sind.

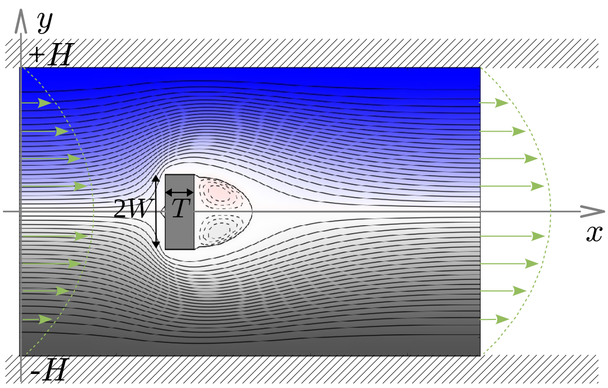

Abbildung 1: Geometrie der Aufgabe, beachte die Spiegelsymmetrie.

Problemstellung mit der Stromfunktion
Wir lösen das Problem mit der Barriere in der Formulation durch die Stromfunktion ψ (Skript S.117). Zeige, dass die 3 Gleichungen (1) mittels ψ, Vortizität ζ und Druck p in der folgenden Form geschrieben werden können,

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi &= \zeta, & (2)\\ \nu\nabla^2\zeta &= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, & (3)\\ \frac{1}{2\rho}\nabla^2 p &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2, & (4) \end{aligned}$$

wobei die Stromfunktion und die Vortizität durch

$$v_x = \partial_y\psi, \qquad v_y = -\partial_x\psi, \qquad \zeta = -\left(\nabla\times\mathbf{v}\right)_z, \tag{5}$$

definiert sind. In der Aufgabe werden wir uns nur für ψ und ζ interessieren, also brauchen wir die entkoppelte Gl.(4) nicht zu berücksichtigen. Anhand der Symmetrie $\psi(x,-y) = -\psi(x,y)$ und $\zeta(x,-y) = -\zeta(x,y)$ brauchen wir nur die obere Hälfte zu simulieren.

Asymptotische Lösung – Strom weit von der Barriere
Weit von der Barriere können wir anhand der Translationssymmetrie in der x-Koordinate das Geschwindigkeitsfeld leicht bestimmen. Das Geschwindigkeitsfeld muss in dem Fall die Form $\mathbf{v}_0 = v_x(y)\mathbf{e}_x$ besitzen. Die Kontinuitätsgleichung ist somit trivial erfüllt. Die y-Komponente der Navier–Stokes Gleichung ergibt $\partial_y p = 0$. Überprüfe, dass die x-Komponente der Navier–Stokes Gleichung mit Haftbedingungen bei $y = \pm H$ durch

$$v_0(y) = v_0\left[1-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]\mathbf{e}_x, \qquad \text{mit} \qquad v_0 = -\frac{\Delta p}{\ell}\frac{H^2}{2\rho\nu}, \tag{6}$$

gelöst wird; dabei bezeichnet $\Delta p/\ell$ das Druckgefälle. Die davonabgeleitete Stromfunktion und Vortizität ergeben

$$\psi_0(y) = v_0 y\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{H}\right)^2\right], \qquad \zeta_0(y) = -2v_0 y/H^2. \tag{7}$$

Diskretisation der Aufgabe
Für numerische Zwecke ist das Problem zu diskretisieren. Einfachheitshalber wählen wir eine regelmässige Diskretisation mit Diskretisationslänge h, siehe Abb.(2). Weiter ist es praktisch mit dimensionsfreien Quantitäten zu arbeiten, daher definieren wir $\tilde\psi = \frac{\psi}{v_0 h}$, $\tilde\zeta = \frac{\zeta}{v_0/h}$, $\tilde y = y/h$, $\tilde x = x/h$ und $\tilde v = v/v_0$, wodurch die Gl.(2-3) reskaliert werden,

$$\begin{aligned} \tilde\nabla^2\tilde\psi &= \tilde\zeta, & (8)\\ \left[\tilde\nabla^2 - R\left(\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde y}\partial_{\tilde x} - \frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde x}\partial_{\tilde y}\right)\right]\tilde\zeta &= 0, & (9) \end{aligned}$$

wo $R = \frac{v_0 h}{\nu}$ die Reynoldsche Zahl unserer Diskretisierung ist. Weiter nutzen wir die Finite-Differenzen-Methode, um die obigen Gleichungen numerisch zu lösen; dabei gebrauchen wir symmetrische Form für die Ableitungen,

$$\left.\tilde\nabla^2 f\right|_{ij} = f_{i(j+1)} + f_{i(j-1)} + f_{(i+1)j} + f_{(i-1)j} - 4f_{ij}, \qquad \left.\partial_{\tilde x} f\right|_{ij} = \left(f_{(i+1)j} - f_{(i-1)j}\right)/2. \tag{10}$$

Schreibt man/frau die diskretisierte Gl.(8-9) in Matrixform, erhaltet man/frau

$$A_{(ij)(i'j')}\tilde{\psi}_{(i'j')} = q_{(ij)}, \qquad \text{und} \qquad B_{(ij)(i'j')}\tilde{\zeta}_{(i'j')} = r_{(ij)}, \tag{11}$$

geschrieben in Form mit Multiindexen. Dabei ist die Matrix A konstant und Vektor q ist durch die Vortizität und die Randbedingungen an $\tilde{\psi}$ gegeben. Die Matrix B hängt von der $\tilde{\psi}$ ab und der Vektor r ist gleich 0, mit Ausnahme von wenigen Komponenten, die die Randbedingungen bestimmen. Die Lösung wird in einer iterativer Prozedur erhalten:

1. Initialisiere $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\zeta}$ (etwa durch die $\tilde{\psi}_0$ und $\tilde{\zeta}_0$);
2. Löse $A\tilde{\psi} = q$ und erhalte neue Stromfunktion $\tilde{\psi}$;
3. Löse $B\tilde{\zeta} = r$ und erhalte neue Vortizität $\tilde{\zeta}$;
4. Wiederhole Punkte 2 und 3 bis zur (approximativen) Konvergenz.

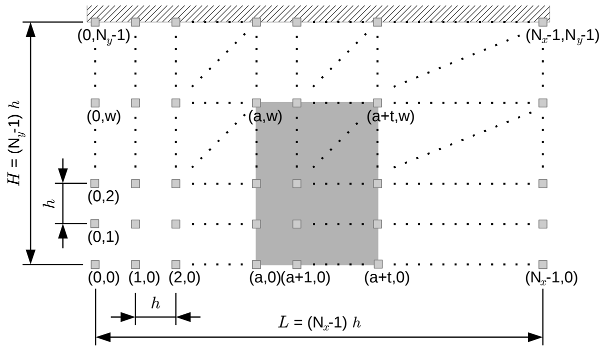

Abbildung 2: Diskretisation der Aufgabe, nur die obere Hälfte ist gezeigt; $W = wh$, $T = th$.

Randbedingungen

Die Stromfunktion haben wir so gewählt, dass sie den Wert 0 auf der Symmetrieachse $y = 0$ aufweist. Die Ränder der Barriere bilden zusammen mit der Symmetrieachse eine einzige Stromlinie, daher muss ψ auf den Barriererändern gleich 0 sein. Der obere Rand bei $y = H$ ist auch eine Stromlinie, da können wir auch die Dirichlet-Randbedingung $\psi(y = H) = \psi_0(y = H) = 2v_0H/3$ nutzen. Für den linken und rechten Rand können wir die Neumann-Randbedingung $\partial_x\psi = 0$ (Translationsinvarianz).[1]

Die Vortizität muss auf der Symmetrieachse, der Symmetrie wegen, verschwinden, also $\zeta(y = 0) = 0$. Für linken und rechten Rand gebrauchen wir Neumann-Randbedingungen $\partial_x\zeta = 0$ (Translationsinvarianz). Etwas weniger ersichtlich sind die Bedingungen bei den Stromabgrenzungen bei der Barriere und an dem oberen Rand. Da kommt die Haftbedingung für viskose Flüssigkeit mit Taylor-Entwicklung der Stromfunktion zur Hilfe – etwa für den oberen Barrierand ist die Vortizität

$$\zeta_{iw} = \tilde{\nabla}^2\tilde{\psi}\Big|_{iw} = \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}^2}\bigg|_{iw}, \tag{12}$$

die Entwicklung der Stromfunktion ergibt

$$\tilde{\psi}_{i(w+1)} \;\; = \;\; \tilde{\psi}_{iw} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}}\bigg|_{iw} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}^2}\bigg|_{iw} + \ldots. \tag{13}$$

[1]Bemerkung: eine Dirichlet-Randbedingung, die die asymptotische Lösung ψ_0 nutzt, könnte auch benutzt werden.

Bedenken wir jetzt, dass die Haftbedingung bei dem oberen Barriererand besagt, dass $\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}} = \tilde{v}_x = 0$, erhalten wir Bedingung

$$\tilde{\zeta}_{iw} = 2\left(\tilde{\psi}_{i(w+1)} - \tilde{\psi}_{iw}\right). \tag{14}$$

Ähnlich sind die Bedingungen bei übrigen Rändern zu ergreifen. Für die Ecken der Barriere bietet sich eine symmetrisierte Form von der Bedingung für den oberen und jeweiligen Seitenrand an, für die linke Ecke

$$\tilde{\zeta}_{aw} = \tilde{\psi}_{a(w+1)} + \tilde{\psi}_{(a-1)w} - 2\tilde{\psi}_{aw}. \tag{15}$$

Weitere (fiktive) Randbedingungen brauchen wir für die Scheinvariablen $\tilde{\psi}$, $\tilde{\zeta}$ drinnen in der Barriere – eine Dirichlet-Bedingung, die den Wert auf 0 fixiert erfüllt dies.

Der Skelett von dem Musterprogramm

Das Programm besteht aus 4 Modulen geschrieben in Programmiersprache `Python`,

- `main.py`: beherbergt das iterative Lösungsverfahren für die gekoppelten Gleichungen;
- `parameters.py`: hier sind alle physikalische Parameter der Aufgabe bestimmt;
- `core_routines.py`: beinhaltet die Skelette der Funktionen, die die Gl.(11) implementieren, *welche zu ergänzen sind*;
- `plotting.py`: beinhaltet alles für die graphische Darstellung der Lösung.

Es werden dazu die `Python`-Bibliotheken `NumPy`, `SciPy` und `Matplotlib` gebraucht. Um das Programm zu starten, lade die 4 Dateien von der Kontinuumsmechanik-Webseite runter, speichere diese in ein Verzeichnis, und führe den Befehl `python main.py` in dem Verzeichnis aus.

Anleitung

- Ergänze die fehlende Zeilen mit diskretisierter Gleichungen und der Randbedingungen für den oberen, unteren, linken und rechten Rand und teste das Programm im `debug_mode` (d.h. ohne die Barriere).[2]
- Ergänze die Randbedingungen für die Barriere, schalte `debug_mode` aus, und mache Testsimulation fürs Problem mit $H = 4W$, $W = T$ bei (physikalischer) Reynolds-Zahl $Re \equiv 2Wv_0/\nu$ gleich 3 und 24.
- Vergrössere die Präzision der selbskonsistenten Berechnung, gegeben durch Variable `aimed_precision` im Modul `main.py` (auf etwa 10^{-8}).
- Untersuche den Effekt der Randbedingungen – vergrössere den Abstand vor der Barriere stromaufwärts ($ah \equiv F$) zusammen mit der Länge zum rechten Rand ($L - F - T$) und finde geeignete F und L.
- Untersuche den Effekt der Diskretisation durch Vergrösserung der Knotenpunktedichte ($\rightarrow$ `points_per_unit_length` im Modul `parameters.py`).

[2]Bemerkung: die analytische Lösung in Gl.(7) fürs Problem ohne Barriere ist nicht eine genaue Lösung der diskretisierter Aufgabe.