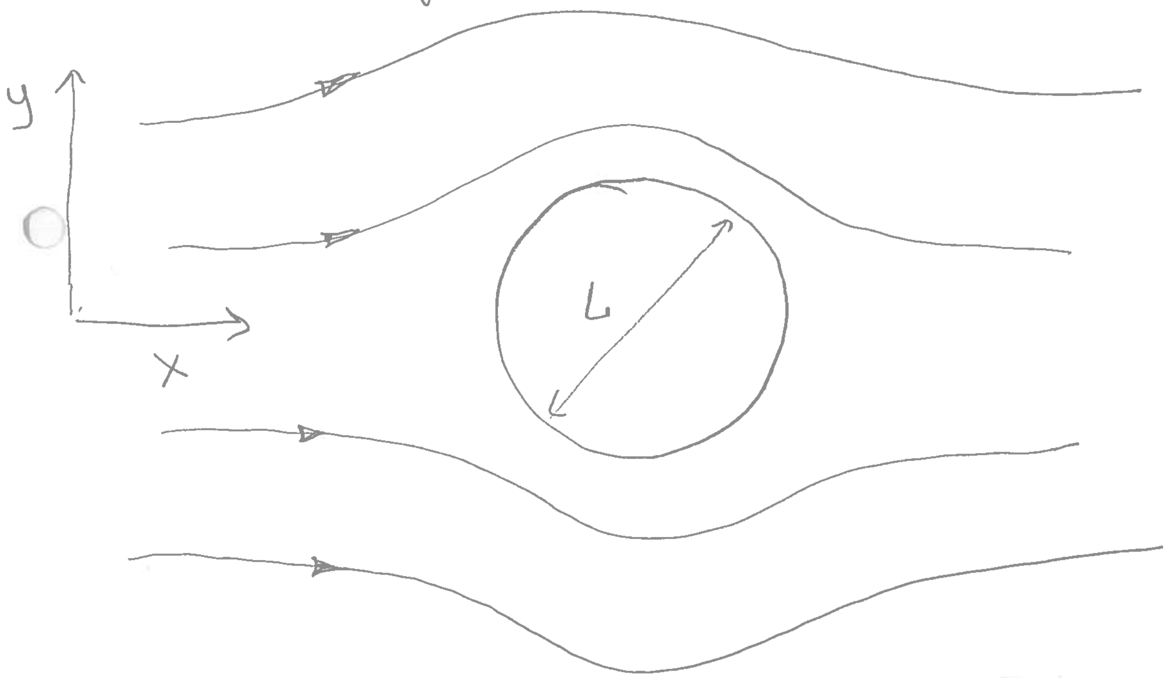
Turbulence

As a function of the Reynolds number character of the flow is changing. Consider a flow around cylinder



In general Navier Stokes equation has following symmetries for this geometry

1. up-down (y-reversal)
2. time invariance ($t \to t + const$)
3. translational invariance along z (cylinder axis)
4. for $Re \to 0$ (Laminar flow) there is additional left-right symmetry (x-reversal)

With increase of Re first disappears (continuously) approximate left-right symmetry - wake formation - standing vortices.

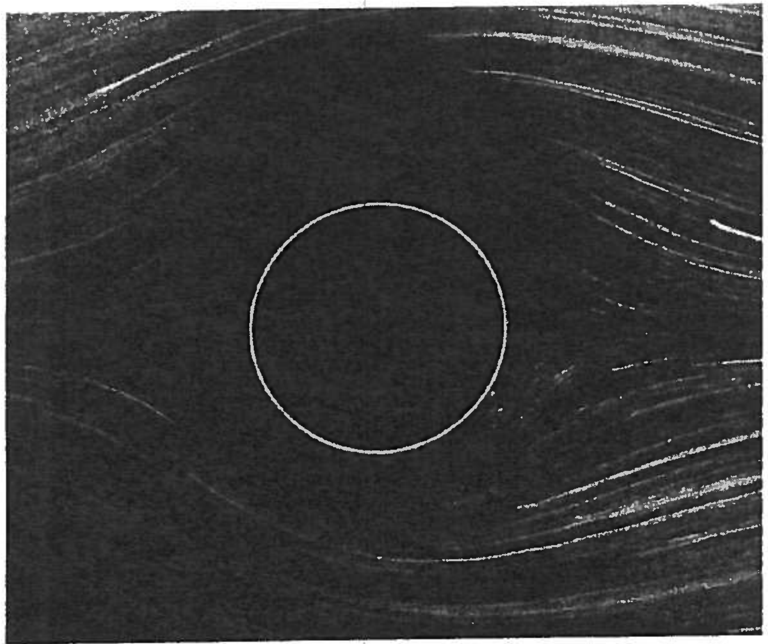
Then at Re $\simeq 40$ there is bifurcation and solution becomes periodic in time. Continuous time invariance $\to$ discrete. For larger Re up-down symmetry is <u>spontaneously broken</u> (von Karman vortex street).

Then z axis translation symmetry breaks and later flow becomes chaotic. At very high Reynolds number some symmetries are restored but in statistical sense.

Симметрия верха и низа — это

$$(x, y, z) \to (x, -y, z), \qquad (u, v, w) \to (u, -v, w). \tag{1.6}$$

Легко проверить, что симметрия левого и правого не вытекает из уравнения Навье–Стокса, а может быть выведена, только если мы пренебрежем нелинейным членом. На самом деле тщательное изучение рис. 1.2 показывает, что симметрия левого и правого не точна, а немного *нарушена*. Это — проявление остаточной нелинейности, которое становится еще слабее при дальнейшем уменьшении числа Рейнольдса.

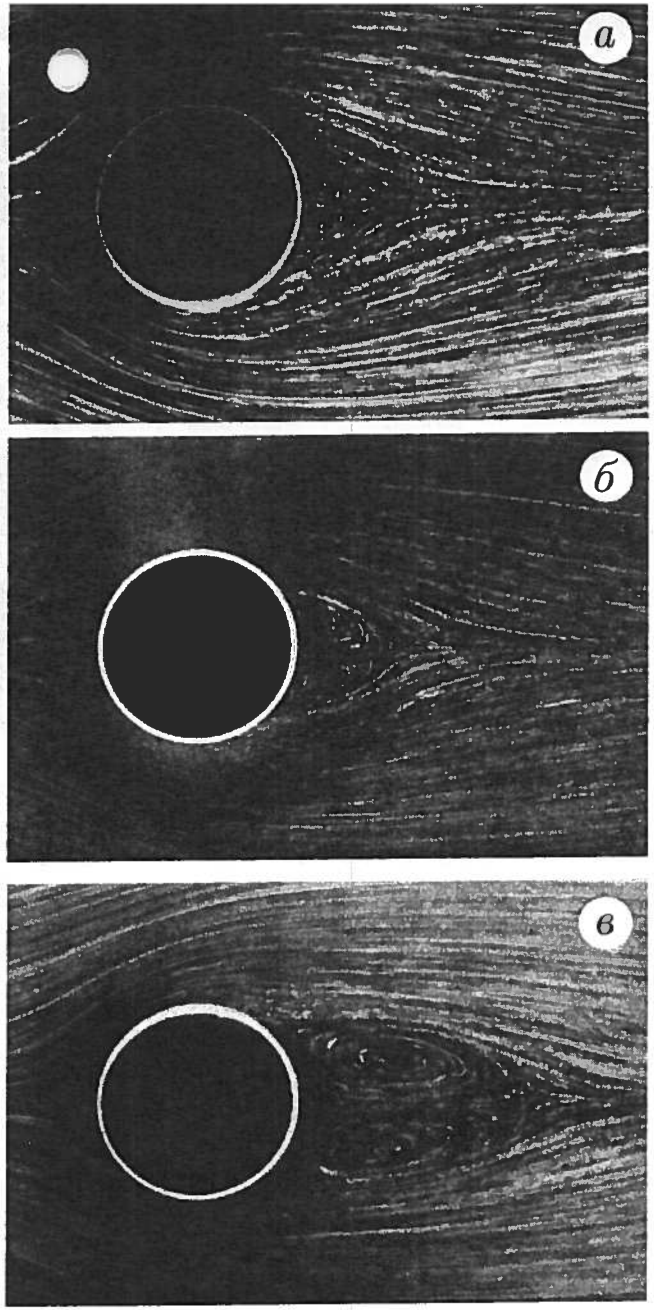


Re=1,54

Рис. 1.3. Круговой цилиндр при $R = 1{,}54$ (Van Dyke 1982). Фотография: S. Taneda

На рис. 1.3 изображено течение при $R = 1{,}54$. Теперь отсутствие симметрии между левой и правой сторонами стало хорошо заметным. Около $R = 5$ поток за цилиндром разрывается. Хотя нового нарушения симметрии не происходит, топология течения изменяется из-за образования стоячих вихрей, показанных на рис. 1.4 для различных значений R от 9,6 до 26.

Около $R = 40$ происходит первая настоящая потеря симметрии, когда после бифуркации Андронова–Хопфа течение начинает зависеть от

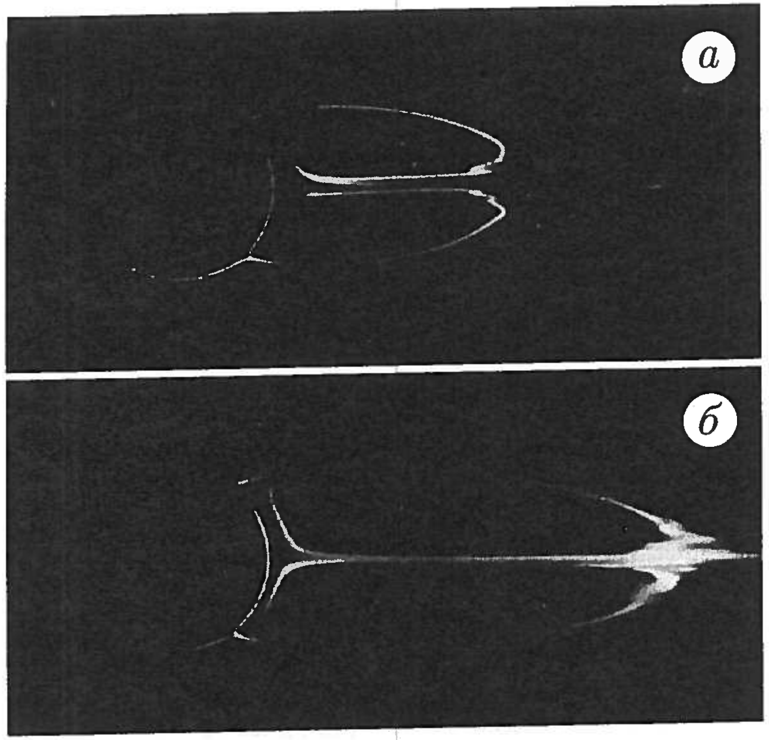


Re=9.6

Re=13.1

Re=26

Рис. 1.4. Круговой цилиндр при $Re = 9{,}6$ (*а*), $Re = 13{,}1$ (*б*) и $Re = 26$ (*в*) (Van Dyke 1982). Фотография: S. Taneda



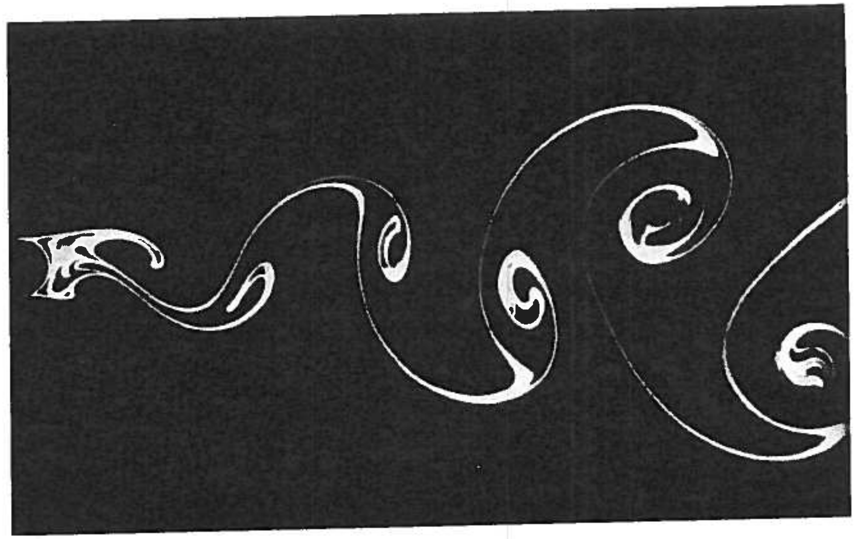
Re=28.4

Re=41.0

1.5. Круговой цилиндр при $R = 28{,}4$ (*а*) и $R = 41{,}0$ (*б*) (Van Dyke 1982). ография: S. Taneda

мени периодически; иными словами, непрерывная t-инвариантность няется дискретной. Течение в ближайшей окрестности точки бикации показано на рис. 1.5. При более высоких значениях R срыв рей приводит к образованию знаменитой дорожки Кармана из черещихся вихрей, которая показана на рис. 1.6, 1.7 и рис. 1.8, получен- при численном моделировании газа на двумерной решетке. Следует етить, что симметрия верха и низа в сущности не нарушается, так через половину периода верхние вихри станут точным зеркальным ажением нижних.

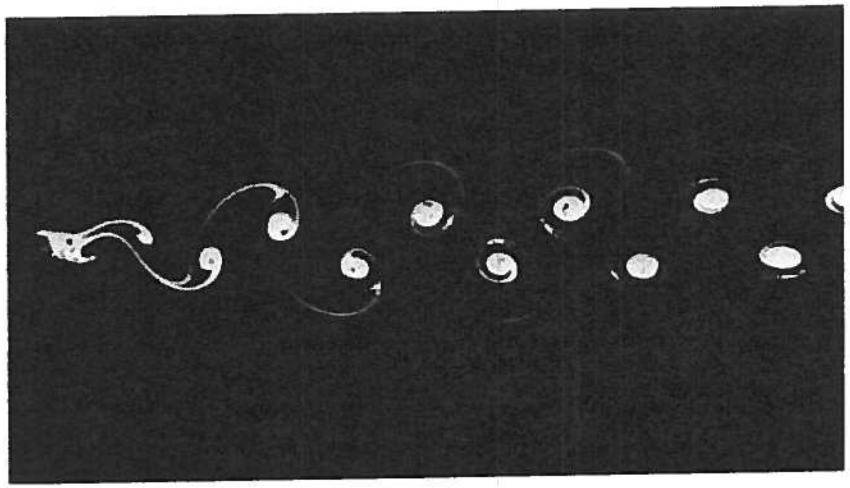
Неизвестно, при каком числе Рейнольдса нарушается однородность ения по оси z. Это трудно определить экспериментально, так как индр не может быть сделан бесконечным и должен удерживать- з каком-либо устройстве, что неизбежно вносит неоднородность z. Имеется численное подтверждение того, что z-инвариантность *нтанно нарушается*, когда число Рейнольдса превосходит некое



Re=140

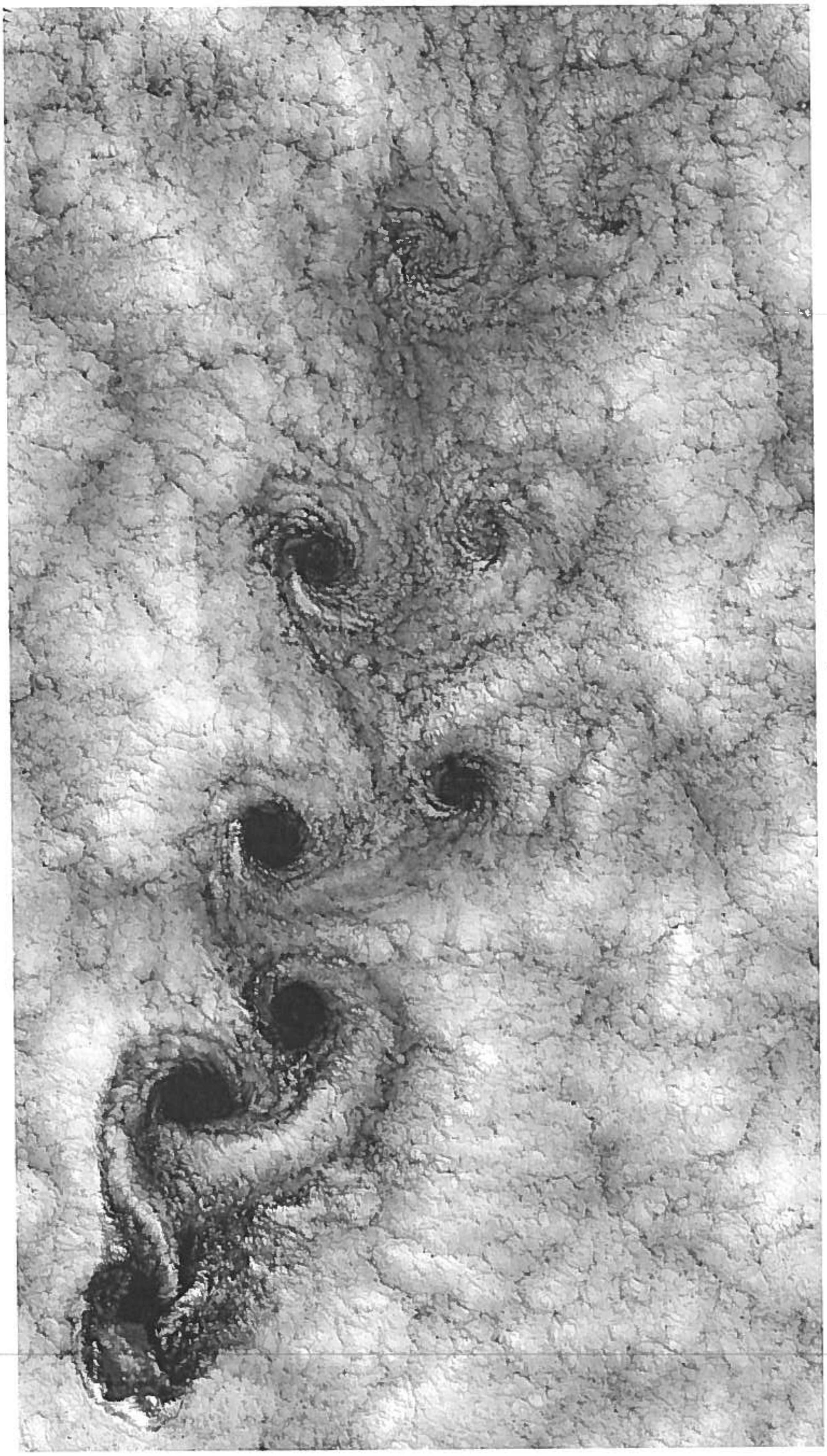
Рис. 1.6. Дорожка Кармана за круговым цилиндром при $R = 140$ (Van Dyke 1982). Фотография: S. Taneda

Von Karman vortex street



Re=105

Рис. 1.7. Дорожка Кармана за круговым цилиндром при $R = 105$ (Van Dyke 1982). Фотография: S. Taneda



Von Karman vortex street caused by wind flowing around the Juan Fernandes Island (Robinson Crusoe) off the Chilean cost

Instabilities

Steady solutions formally exist for all Reynolds numbers. But for $Re > Re_c$ they become unstable. This means that some small perturbations will grow in time.

To look for stability of the steady solution $v_0(r)$, we superpose a time dependent small perturbation $v_1(r,t)$.

We should substitute this $v = v_0(r) + v_1(r)$, $p = p_0 + p_1$ in the Navier-Stokes equation. Linearizing we get

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \mathrm{grad})\,\vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \mathrm{grad})\,\vec{v}_0 = -\frac{\mathrm{grad}\, p_1}{\rho} + \nu \Delta v_1$$

$$\mathrm{div}\; v_1 = 0$$

Boundary condition is $v_1 = 0$ at the solid surfaces.

This is system of linear differential equations with time independent coefficients $\longrightarrow$ Eigenvalue problem. We can expand in Fourier

$$v_1 = \sum v_\omega(r)\, e^{-i\omega t}$$

If for same ω, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ this solution will grow in time.

Sometimes it is easy to figure out which mode become unstable. An example is Kelvin-Helmholtz instability of tangential velocity discontinuity (one fluid layer slides along another – a formal steady solution of Euler eq.)

Larger velocity → smaller pressure → higher the wave.

Let us consider behavior for $Re \simeq Re_c$

L. D. Landau (1944)

Linearizing NS Eq. near laminar solution and check for stability

$$v = v_0 + v_1(r,t) \; ; \; v_1(r,t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} v_{\omega}(r)$$

Below instability $Re < Re_c$ $\quad Im\, \omega < 0$

Just above the instability threshold, there is usually one unstable mode $\omega_1 \Rightarrow$ at $Re = Re_c$ $Im\, \omega_1$ changes sign.

Let us write $\quad v_1 = A(t)\, v_1(r)$

where $A(t) \propto e^{\gamma_1 t - i\omega_1 t}$ for short times

For large times linearization is not working. In reality $|A|$ does not grow without limit, but saturates. For Re close to Re_c this finite value is small and can be determined as follows.

Initial exponential grow of $|A|$ can be obtained from the equation

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2$$

R.h.s is just the first term in an expansion in A and A^*. In general,

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1|A|^2 + \text{third order term} + \text{fourth order term} + \ldots$$

Averaging over times larger than $\frac{2\pi}{\omega_1}$ but smaller than $\frac{2\pi}{\gamma_1}$ odd terms vanish and

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4$$

For $\alpha > 0$ solution of this equation is

$$|A|^{-2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const}\, e^{-2\gamma_1 t}$$

Thus the saturated value

$$|A|^2_{max} = \frac{2\gamma_1}{\alpha}$$

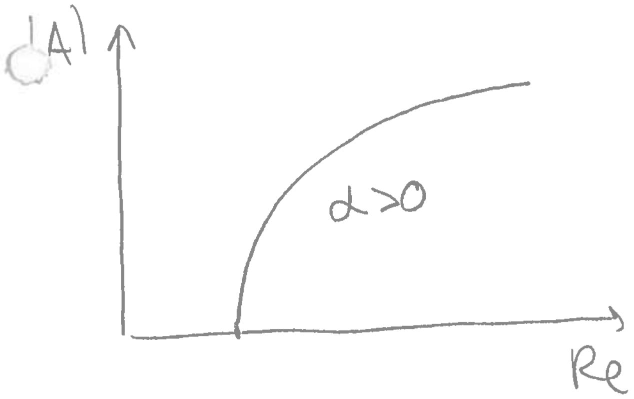
γ_1 is some function of the Reynolds number

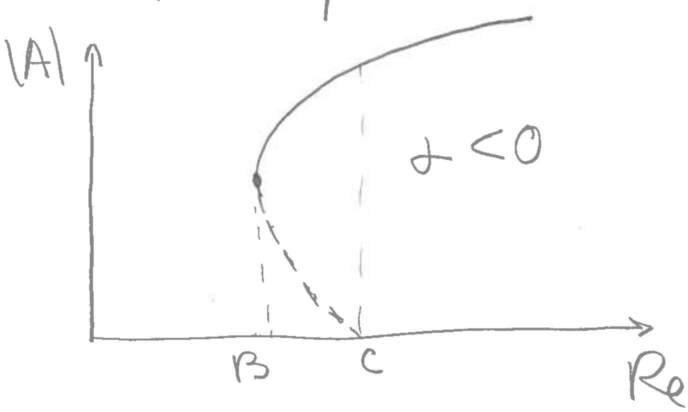
Near Re_c it can be expanded as power series of $Re - Re_c$. But $\gamma_1(Re_c) = 0$ by the definition of critical Reynolds number. Thus it is reasonable to assume that $\gamma_1 \propto Re - Re_c \Rightarrow$

$$\underline{|A|_{max} \propto (Re - Re_c)^{1/2}}$$

If $\alpha < 0$ then one needs $-\beta |A|^6$ term to stabilize the instability and

$$|A|^2_{max} = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2\gamma_1}{\beta}}$$





Between B and C the steady flow is metastable (stable with infinitesimally small but unstable with respect to perturbation of finite amplitude. Broken curve is unstable branch.