

Elektrodynamik

Übungsblätter

ETH/Uni Zürich, FS14

PROF. N. BEISERT

© 2014 ETH Zurich

Dieses Dokument sowie seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Reproduktion eines Teils dieses Dokuments in beliebiger Form ohne vorgängige schriftliche Erlaubnis der ETH Zürich ist nur zum privaten, wissenschaftlichen und nicht-gewerblichen Gebrauch gestattet.

Inhaltsverzeichnis

Blatt 1	1.1
1.1. Vektoranalysis	1.1
1.2. Gaußscher Satz	1.2
1.3. Stokesscher Satz	1.2
Blatt 2	2.1
2.1. Potential und elektrische Feldstärke	2.1
2.2. Stabiles Gleichgewicht	2.1
2.3. Energie im Plattenkondensator	2.1
2.4. Elektrische Feldstärke in einer Hohlkugel	2.1
2.5. Delta-Funktion	2.2
Blatt 3	3.1
3.1. Imaginäre Dipole	3.1
3.2. Leitende Kugel im elektrischen Feld	3.1
3.3. Kugelförmiger Hohlraum	3.2
3.4. Kapazitäten	3.2
Blatt 4	4.1
4.1. Sphärische Multipolmomente eines Würfels	4.1
4.2. Stromdurchflossener Leiter	4.2
4.3. Magnetisches Feld einer endlichen Spule	4.2
4.4. Rotationsübungen	4.2
Blatt 5	5.1
5.1. Magnetisches Moment einer rotierenden Kugelschale	5.1
5.2. Kondensator mit Dielektrikum	5.1
5.3. Eisenrohr im Magnetfeld	5.2
Blatt 6	6.1
6.1. Greensche Funktionen in der Elektrostatik	6.1
6.2. Greensche Funktion in zwei Dimensionen	6.2
6.3. Kartesische Multipolentwicklung	6.3
6.4. Multipolmomente in kartesischen und Kugelkoordinaten	6.4
6.5. Magnetfeld in einem nicht-koaxialen Hohlzylinder	6.4
6.6. Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife	6.4
6.7. Magnetfeld eines geknickten Drahtes	6.4
Blatt 7	7.1
7.1. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	7.1
7.2. Induktion im Magnetfeld	7.1
7.3. Selbstinduktion eines Koaxialkabels	7.1
Blatt 8	8.1
8.1. Fourier-Transformation	8.1
8.2. Elliptisch polarisierte Wellen	8.1
8.3. Gruppengeschwindigkeit	8.2

Blatt 9	9.1
9.1. Dynamik eines elektrischen Schaltkreises	9.1
9.2. Der Poynting-Vektor	9.2
Blatt 10	10.1
10.1. Feynmansches Paradoxon	10.1
10.2. Ebene Wellen im leitenden Medium	10.2
Blatt 11	11.1
11.1. Rechteckiger Hohlleiter	11.1
11.2. Dipolstrahlung	11.2
Blatt 12	12.1
12.1. Optik gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung	12.1
12.2. Brechung von ebenen Wellen	12.2
12.3. Lichtstreuung	12.2
Blatt 13	13.1
13.1. Beugung an einem rechteckigen Spalt	13.1
13.2. Invarianter Abstand	13.1
13.3. Elektromagnetischer Feldtensor	13.2
13.4. Lienard–Wiechert Potential	13.2

1.1. Vektoranalysis

In der Elektrodynamik treten häufig Standardidentitäten der Vektoranalysis auf. Diese sollen mit dieser Aufgabe wieder ins Gedächtnis zurückgerufen werden.

Definitionen/Konventionen: Wir schreiben die bekannten vektoriellen Ableitungsoperatoren grad, div, rot i.d.R. mittels des Vektors $\vec{\nabla}$ partieller Ableitungen $\nabla_i := \partial/\partial x_i$ als

$$\text{grad } F := \vec{\nabla} F, \quad \text{div } \vec{A} := \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad \text{rot } \vec{A} := \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.1)$$

Die Komponenten eines dreidimensionalen Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ sind gegeben durch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (1.2)$$

Hier ist ε_{ijk} der total antisymmetrische Tensor für \mathbb{R}^3 mit $\varepsilon_{123} = +1$.

a) Zeige zunächst, daß

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = \delta_{kl}. \quad (1.3)$$

b) Zeige nun die folgenden Identitäten für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (1.4)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \quad (1.5)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \quad (1.6)$$

c) Beweise schließlich die folgenden Identitäten für beliebige skalare Felder F und vektorielle Felder \vec{A}, \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} F) = 0, \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (F \vec{A}) = (\vec{\nabla} F) \cdot \vec{A} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times (F \vec{A}) = (\vec{\nabla} F) \times \vec{A} + F \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (1.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (1.13)$$

→

1.2. Gaußscher Satz

Betrachte folgende Vektorfelder \vec{A}_i in zwei Dimensionen

$$\vec{A}_1 = (3xy(y-x), x^2(3y-x)), \quad (1.14)$$

$$\vec{A}_2 = (x^2(3y-x), 3xy(x-y)), \quad (1.15)$$

$$\vec{A}_3 = (x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2)) = \vec{x}/\vec{x}^2. \quad (1.16)$$

- a) Berechne den Fluß von \vec{A}_i durch den Rand des Quadrats Q mit den Eckpunkten $\vec{x} = (\pm 1, \pm 1)$

$$I_i = \oint_{\partial Q} dx \vec{n} \cdot \vec{A}_i. \quad (1.17)$$

- b) Berechne die Divergenz von \vec{A}_i und dessen Integral über die Fläche desselben Quadrats Q

$$I'_i = \int_Q d^2x \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_i. \quad (1.18)$$

1.3. Stokesscher Satz

Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{A} = (x^2y, x^3 + 2xy^2, xyz). \quad (1.19)$$

- a) Berechne das Integral entlang eines Kreises S um den Ursprung in der xy -Ebene mit Radius R

$$I = \oint_S d\vec{x} \cdot \vec{A}. \quad (1.20)$$

- b) Berechne die Rotation \vec{B} des Vektorfeldes \vec{A}

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.21)$$

- c) Berechne nun den Fluß der Rotation \vec{B} durch die von S berandete Kreisscheibe D , $\partial D = S$

$$I' = \int_D d^2x \vec{n} \cdot \vec{B}. \quad (1.22)$$

2.1. Potential und elektrische Feldstärke

Vier Punktladungen sind an den Ecken $(a, 0)$, (a, a) , $(0, a)$, $(0, 0)$ eines Quadrates angebracht. Bestimme das Potential und die elektrische Feldstärke in der Ebene dieses Quadrates. Skizziere die Feldlinien und die Äquipotentiallinien für folgende Ladungsverteilungen:

- a) $+q, +q, +q, +q$;
- b) $-q, +q, -q, +q$;
- c) $+q, +q, -q, -q$.

Hinweis: In Mathematica sind die Befehle `ContourPlot` und `StreamPlot` nützlich.

2.2. Stabiles Gleichgewicht

Zwei Kugeln jeweils mit Ladung $+q$ liegen auf einer Isolatorplatte in der Ebene $z = 0$ und können sich dort reibungsfrei bewegen. Unter der Platte befindet sich bei $\vec{r} = (0, 0, -b)$ eine weitere Kugel mit Ladung $-2q$ fest fixiert. Behandle die Kugeln als Punktladungen und finde stabile Positionen für die Kugeln auf der Platte.

2.3. Energie im Plattenkondensator

Zwei Platten mit Ladung $+Q$ und $-Q$ und Fläche A sind parallel zueinander im (kleinen) Abstand d angeordnet. Wie groß ist die Energie, die im elektrischen Feld zwischen den Platten gespeichert ist?

2.4. Elektrische Feldstärke in einer Hohlkugel

Eine geladene Kugel mit homogener Ladungsdichte ρ und Radius R_A enthalte einen um den Vektor \vec{a} gegen den Mittelpunkt verschobenen, kugelförmigen Hohlraum mit Radius $R_I < R_A - |\vec{a}|$. Berechne die elektrische Feldstärke im Hohlraum.

Hinweis: Verwende den Gaußschen Satz sowie das Superpositionsprinzip zur Berechnung der elektrischen Feldstärke.

→

2.5. Delta-Funktion

Die delta-Funktion wird oft gebraucht um in einer Ladungsdichte Punktladungen darzustellen. Sie ist definiert durch die folgende Eigenschaft bei Integration über eine glatte Testfunktion f mit kompakten Träger

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = f(a). \quad (2.1)$$

a) Zeige, dass sie als Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_{\epsilon}(x) = \delta(x)$ geschrieben werden kann, wobei

$$g_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-x^2/(2\epsilon)}. \quad (2.2)$$

b) Zeige ebenso $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{\epsilon}(x) = \delta(x)$ mit

$$h_{\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right). \quad (2.3)$$

c) Zeige, dass die Ableitung der delta-Funktion die folgende Eigenschaft besitzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x - a) = -f'(a). \quad (2.4)$$

3.1. Imaginäre Dipole

Gegeben sind zwei Punktladungen q und q' im Abstand d sowie eine Ebene im Abstand αd von q , die auf der Verbindung von q und q' senkrecht steht.

- a) Zeige, dass die Ebene genau dann eine Äquipotentialebene ist, wenn $q' = -q$ und $\alpha = 1/2$ gilt.

Hinweis: Betrachte zuerst das Potential in großer Entfernung.

Betrachte nun eine Punktladung q mit den kartesischen Koordinaten $(a, b, 0)$ im freien Bereich eines Raumes, der außer für positive x und y mit einem geerdeten Leiter gefüllt ist.

- b) Begründe, dass zwei Spiegelladungen – eine bezüglich der Ebene $x = 0$, eine bezüglich $y = 0$ – nicht genügen, die Randbedingungen für den Leiter zu erfüllen.
- c) Führe unter Ausnutzung der Symmetrie der Anordnung eine zusätzliche Spiegelladung ein und zeige explizit, dass diese die begrenzenden Ebenen zu Äquipotentialebenen macht.

Betrachte schließlich eine Punktladung im freien Segment eines Raumes, der bis auf den Bereich des Winkels $0 \leq \varphi \leq \pi/n$ (n ganzzahlig) mit einem geerdeten Leiter gefüllt ist.

- d) Bestimme eine Verteilung von Spiegelladungen, die das elektrische Feld dieser Ladung im freien Raumsegment reproduziert. Was ist die elektrische Feldstärke auf der Schnittgeraden der beiden Begrenzungsebenen?

3.2. Leitende Kugel im elektrischen Feld

Eine leitende Kugel, auf der die Gesamtladung Q sitzt, wird in ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$ gebracht. Wie verändert sich das elektrische Feld durch die Anwesenheit der Kugel? Wie ist die Ladung auf der Oberfläche der Kugel verteilt?

Hinweise: Motiviere den folgenden Ansatz in Kugelkoordinaten

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = f_0(r) + f_1(r) \cos \vartheta, \quad (3.1)$$

und löse die Poisson-Gleichung im Aussenraum $\Delta\Phi = 0$ mit dem Laplace Operator

$$\Delta\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (3.2)$$

Benutze anschliessend die folgenden Randbedingungen, um die gesuchte Lösung zu finden:

- Weit weg von der Kugel soll nur das homogene Feld übrig bleiben.
- Die Oberfläche der leitenden Kugel muss eine Äquipotentialfläche sein.
- Das elektrische Feld muss das Gaußsche Gesetz erfüllen.

→

3.3. Kugelförmiger Hohlraum

Das Potential auf der Oberfläche eines kugelförmigen Hohlraumes mit Radius R ist gegeben durch eine beliebige Funktion $U(\vartheta, \varphi)$.

- a) Zeige, dass sich das Potential im Inneren der Hohlkugel schreiben lässt als

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{R(R^2 - r^2) U(\vartheta', \varphi')}{4\pi(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{3/2}} \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi', \quad (3.3)$$

wobei γ der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{x}' ist. Bestimme $\cos \gamma$ in Abhängigkeit von den Variablen $\vartheta, \varphi, \vartheta'$ and φ' .

Hinweis: Bestimme die Greensche Funktion unter Verwendung der Spiegelladungsmethode und drücke die Vektoren darin in Kugelkoordinaten aus.

- b) Gib die allgemeinste Lösung der Laplace-Gleichung mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ an. Verwende dann die Orthonormalitätsrelation, um die Koeffizienten für die gegebenen Randbedingungen zu bestimmen.

- c) Gib das Potential $\Phi(\vec{x})$ innerhalb der Hohlkugel explizit an für die Randbedingung

$$U(\vartheta, \varphi) = U_0 \cos \vartheta. \quad (3.4)$$

3.4. Kapazitäten

Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei isolierten Leitern, auf denen gleich grosse entgegengesetzte Ladungen $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$ sitzen. Die beiden Leiter haben dann im allgemeinen unterschiedliches elektrisches Potential, und $U = \Phi_1 - \Phi_2$ bezeichne die Potentialdifferenz. Eine charakteristische Grösse des Kondensators ist die Kapazität C , die definiert ist durch

$$C = \frac{|Q|}{|U|}. \quad (3.5)$$

Berechne die Kapazität für die folgenden Anordnungen:

- a) zwei grosse parallele Ebenene mit Fläche A und kleinem Abstand d ;
b) zwei konzentrische, leitende Kugeloberflächen mit Radien a und b ($b > a$);
c) zwei koaxiale, leitende Zylinderflächen der Länge L und der Radien a, b ($L \gg b > a$).

4.1. Sphärische Multipolmomente eines Würfels

Positive und negative Punktladungen $\pm q$ sind auf den Ecken eines Würfels mit Kantenlänge a angeordnet. Ladungen auf benachbarten Ecken haben entgegengesetztes Vorzeichen. Das Zentrum des Würfels liegt im Koordinatenursprung und die Kanten sind parallel zu den x, y, z -Achsen ausgerichtet. Die Ladung an der Ecke mit $x, y, z > 0$ sei positiv.

- a) Bestimme die Lage der Ladungen in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.
b) Bestimme die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten und anschließend in Kugelkoordinaten. Verwende hierbei

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (4.1)$$

sowie $\sin \vartheta = \sin(\pi - \vartheta)$ und $\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$.

- c) Berechne die sphärischen Dipol-, Quadrupol- und Oktupolmomente dieser Ladungsverteilung. Verwende hierbei

$$q_{l,m} = \int d^3r \rho(\vec{r}) r^l Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi), \quad m = -l, -(l-1), \dots, +(l-1), +l. \quad (4.2)$$

Die benötigten Kugelflächenfunktionen lauten:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= 1, & Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, \\ Y_{10} &= \sqrt{3} \cos \vartheta, & Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \\ Y_{33} &= -\sqrt{\frac{35}{16}} \sin^3 \vartheta e^{3i\varphi}, & Y_{32} &= \sqrt{\frac{105}{8}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \\ Y_{31} &= -\sqrt{\frac{21}{16}} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta e^{i\varphi}, & Y_{30} &= \sqrt{\frac{7}{4}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Weiter gilt: $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^*$ und somit $q_{l,-m} = (-1)^m q_{l,m}^*$.

→

4.2. Stromdurchflossener Leiter

Betrachte einen geraden, zylindrischen Draht mit Radius R entlang der z -Achse. Der Betrag der Stromdichte innerhalb des Drahtes hat die folgende Abhängigkeit vom Abstand zur Drahtmitte:

$$j(\rho) = j_0 e^{-\rho^2/R^2} \theta(R - \rho), \quad (4.4)$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\theta(x)$ die Einheits-Stufenfunktion ist.

- Bestimme den Gesamtstrom I , der durch den Draht fließt, und drücke die Stromdichte j_0 durch I aus.
- Bestimme das magnetische Feld innerhalb und außerhalb des Drahtes als Funktion des Gesamtstromes. Skizziere die Feldlinien und gib ihre Richtung an. Nimm dabei an, dass der Strom in die positive z -Richtung fließt.

4.3. Magnetisches Feld einer endlichen Spule

Betrachte einen zylindrisch aufgewickelten Draht entlang der z -Achse. Der Radius dieser zylindrischen Spule sei R , ihre Länge sei L (von $z = -L/2$ bis $z = +L/2$). Sei nun $n = N/L$ die Windungszahl pro Längeneinheit und I der (konstante) Gesamtstrom, der durch den Draht fließt. Randeffekte dürfen vernachlässigt werden.

Berechne die z -Komponente der magnetischen Flussdichte B für Punkte auf der Symmetrieachse. Bestimme das magnetische Feld für $L \rightarrow \infty$ bei konstantem n .

4.4. Rotationsübungen

Die Drehgruppe (in N Dimensionen) wird beginnend mit der Gruppe der linearen Abbildungen eines Vektorraumes definiert, welche das kanonische Skalarprodukt erhalten.

- Zeige, dass eine lineare Transformation, die die Norm aller Vektoren erhält, auch das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren erhält. Zeige dann, dass eine Matrix, die die Norm aller Vektoren erhält, orthogonal ist.
- Zeige, dass die Determinante jeder orthogonalen Matrix $+1$ oder -1 ist.

Orthogonale Matrizen mit negativer Determinante stellen Transformationen dar, die eine Spiegelung beinhalten. Da wir hier nur Rotationen betrachten wollen, beschränken wir uns auf die Gruppe von Matrizen mit positiver Determinante, d.h. auf die spezielle orthogonale Gruppe $SO(N)$

- Gib die Matrizen an, die in drei Dimensionen Rotationen um einen infinitesimalen Winkel $d\varphi$ um die i -te Koordinatenachse beschreiben. Finde nach Abspaltung der Einheitsmatrix einen einfachen Ausdruck der resultierenden Matrizen unter Verwendung des total antisymmetrischen Tensors ε_{ijk} .
- Zeige, dass infinitesimale Rotationen bis auf Terme höherer Ordnung kommutieren, während makroskopische Rotationen typischerweise nicht kommutieren.
- Gib die infinitesimale Rotation um den Winkel $d\varphi$ um eine beliebige Achse mit Einheitsvektor \vec{n} an (verwende dabei, dass \vec{n} invariant unter dieser Rotation ist). Erweitere das Resultat auf Rotationen um makroskopische Winkel φ um \vec{n} durch eine große Zahl von sukzessiven infinitesimalen Rotationen. Zeige, dass jede Rotation mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ und beliebigem \vec{n} (genau) eine weitere Darstellung mit anderem φ' , \vec{n}' hat.

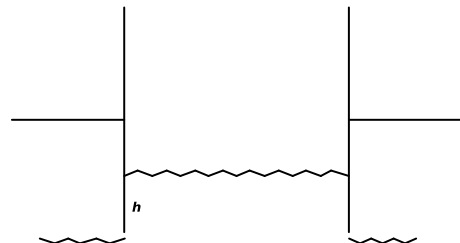
5.1. Magnetisches Moment einer rotierenden Kugelschale

Eine Kugelschale mit Radius R und Ladung Q (homogen auf der Oberfläche verteilt) rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.

- Berechne die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})\rho(\vec{r})$.
- Berechne das magnetische Moment $\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))$ der Kugelschale.
- Zeige, dass das von dieser Kugelschale erzeugte Feld für $|\vec{r}| \gg R$ das Feld eines magnetischen Dipols ist, und gib den führenden Term von \vec{B} an.
Hinweis: Verwende das Biot–Savart-Gesetz und betrachte nur die führenden nicht-verschwindenden Terme in $R/|\vec{r}|$.
- Sei nun \vec{r}_2 ein Vektor mit $\vec{r}_2 \perp \vec{\omega}$ und $|\vec{r}_2| \gg R$. Berechne in niedrigster Ordnung die Kraft, die das in der vorangehenden Teilaufgabe berechnete Magnetfeld auf eine zweite gleichartige Kugelschale ausübt, die am Ort \vec{r}_2 mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ parallel zu $\vec{\omega}$ rotiert. Aufgrund des großen Abstandes der beiden Kugelschalen ist es zulässig, sie als punktförmige Objekte mit magnetischem Moment zu behandeln.

5.2. Kondensator mit Dielektrikum

Betrachte einen Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge a und Abstand d . Der Kondensator werde mit der Ladung $\pm Q$ aufgeladen und anschließend von der Spannungsquelle getrennt. Bringt man den geladenen Kondensator nun oberhalb einer dielektrischen Flüssigkeit (Dichte ρ_{fl} , Dielektrizitätszahl ϵ_r) an, so steigt die Flüssigkeit zwischen den Platten bis zu einer Maximalhöhe h_0 nach oben.



- Bestimme die im Kondensator gespeicherte elektrostatische Energie $W_{\text{el}}(h)$ in Abhängigkeit von der Steighöhe h und den oben definierten Größen.
- Bestimme die potentielle Energie $W_{\text{pot}}(h)$ der Flüssigkeit zwischen den Platten als Funktion von h .
- Leite aus der Bedingung, dass die Gesamtenergie minimiert wird, eine Bestimmungsgleichung für h_0 her. Welche Ladungsmenge muss man bei $a = 20 \text{ cm}$, $d = 5 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 3$, $\rho_{\text{fl}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$ auf den Kondensator aufbringen, damit die Flüssigkeit bis zur Hälfte steigt?

→

5.3. Eisenrohr im Magnetfeld

Ein unendlich langer Hohlzylinder (Innenradius b , Außenradius a) werde mit seiner Achse senkrecht zu einer ursprünglich homogenen magnetischen Flussdichte \vec{B}_0 platziert. Der Hohlzylinder sei aus Eisen (Permeabilität μ). Es wird angenommen, dass die ursprüngliche Flussdichte \vec{B}_0 klein genug ist, dass das Eisen nicht saturiert wird und dass die Permeabilität μ in dem relevanten Bereich konstant ist.

- a) Leite einen Ausdruck für \vec{B} im Hohlraum ($r < b$) her.

Hinweis: Verwende die Abwesenheit freier Ströme, um das Magnetfeld \vec{H} über ein skalares Potential Φ mit $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi$ zu ausdrücken. Die Laplace-Gleichung gilt in allen drei relevanten Raumbereichen. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (5.1)$$

Die Randbedingungen von \vec{H} und \vec{B} an den Grenzflächen sowie das Verhalten für $|\vec{r}'| \rightarrow 0$ und $|\vec{r}'| \rightarrow \infty$ fixieren die Konstanten in der Lösung der Differentialgleichung.

- b) Skizziere die magnetischen Feldlinien im gesamten Raumgebiet, bevor und nachdem der Zylinder im Feld platziert wird. Betrachte auch die Fälle eines paramagnetischen ($\mu_r > 1$), eines diamagnetischen ($\mu_r < 1$), und eines supraleitenden ($\mu_r = 0$) Zylinders.

6.1. Greensche Funktionen in der Elektrostatik

In dieser Aufgabe werden wir die Greensche Funktion der Elektrostatik genauer analysieren. Wir betrachten Greensche Funktionen auf einem Volumen V mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen auf der Oberfläche ∂V .

- a) Verwende die zweite Greensche Identität

$$\int_V d^3x (\phi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \phi) = \oint_{\partial V} d^2x \vec{n} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \quad (6.1)$$

mit $\phi(\vec{x}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ and $\psi(\vec{x}) = G(\vec{z}, \vec{x})$. Benutze, dass $\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{y}, \vec{x}) = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$.
Drücke die Differenz $G(\vec{y}, \vec{z}) - G(\vec{z}, \vec{y})$ als Integral über die Oberfläche ∂V aus.

- b) Zeige, dass die Greensche Funktion $G_D(\vec{x}, \vec{y})$ mit Dirichlet-Randbedingung $G_D(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für $\vec{y} \in \partial V$ symmetrisch in \vec{x} und \vec{y} ist.
- c) Begründe, dass $\vec{n}_y \cdot \vec{\nabla}_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow -\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$ für $\vec{x} \rightarrow \partial V$ und $\vec{y} \in \partial V$. Im Fall $\vec{x} \not\rightarrow \vec{y}$ nutze die Dirichlet-Randbedingung für $G_D(\vec{x}, \vec{y})$. Um den Spezialfall $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$ zu verstehen, integriere den obigen Ausdruck über alle $\vec{y} \in \partial V$ vor Ausführung des Grenzwerts.
- d) Betrachte nun die Neumann-Randbedingung $\vec{n}_y \cdot \vec{\nabla}_y G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -F(\vec{y})$ für \vec{y} in ∂V mit $\oint_{\partial V} d^2x F(\vec{x}) = 1$. Zeige, dass $G_N(\vec{x}, \vec{y})$ im Allgemeinen nicht symmetrisch in \vec{x} und \vec{y} ist. Konstruiere eine Greensche Funktion $G'_N(\vec{x}, \vec{y}) = G_N(\vec{x}, \vec{y}) + H(\vec{y}) + K(\vec{x})$, welche symmetrisch in \vec{x} und \vec{y} ist. Was muß für H und K gelten?

→

6.2. Greensche Funktion in zwei Dimensionen

- a) In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Greenschen Funktionen in zwei Dimensionen. Betrachte die Greensche Funktion im Inneren des Quadrates $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ mit Dirichlet-Randbedingungen auf den Kanten. Zeige, dass die Greensche Funktion, welche diese Randbedingungen erfüllt, die folgende Entwicklung hat,

$$G(x, y, x', y') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y, y') \sin(n\pi x) \sin(n\pi x') . \quad (6.2)$$

Die Koeffizienten $g_n(y, y')$ erfüllen die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - n^2\pi^2 \right) g_n(y, y') = -\delta(y' - y) , \quad (6.3)$$

$$g_n(y, 0) = g_n(y, 1) = 0 . \quad (6.4)$$

Benutze dabei, dass für $0 \leq x, x' \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \sin(n\pi x') = \frac{1}{2} \delta(x - x') . \quad (6.5)$$

- b) Die homogene Lösung der Differentialgleichung für g_n kann als Linearkombination von $\sinh(n\pi y')$ und $\cosh(n\pi y')$ geschrieben werden. Mache einen Ansatz in beiden Bereichen $y < y'$ und $y > y'$, der die Randbedingungen und die Diskontinuität der ersten Ableitung erfüllt, die durch die delta-Funktion erzwungen wird. Zeige, dass g_n explizit geschrieben werden kann als

$$g_n(x, y, x', y') = \frac{\sinh(n\pi y_{<}) \sinh(n\pi(1 - y_{>}))}{\pi n \sinh(n\pi)} , \quad (6.6)$$

wobei $y_{<}$ ($y_{>}$) der jeweils kleinere (größere) Wert von y und y' ist.

- c) Das Quadrat habe nun eine homogene Ladungsdichte ρ . Ausserdem nehmen wir an, dass die Linien, die das Quadrat begrenzen, geerdet sind. Benutze die Greensche Funktion, die wir zuvor hergeleitet haben, und zeige, dass das Potential geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \frac{4\rho}{\pi^3 \epsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)\pi x)}{(2m+1)^3} \\ & \cdot \left(1 - \frac{\sinh((2m+1)\pi(1-y)) + \sinh((2m+1)\pi y)}{\sinh((2m+1)\pi)} \right) . \end{aligned} \quad (6.7)$$

→

6.3. Kartesische Multipolentwicklung

In dieser Aufgabe werden kartesische Multipolmomente genauer untersucht, mit deren Hilfe man die Integraldarstellungen für die Potentiale $\Phi(\vec{x})$ und $\vec{A}(\vec{x})$ sowie die Felder $\vec{E}(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x})$, die durch lokalisierte statische Ladungs- und Stromdichten $\rho(\vec{y})$ und $\vec{j}(\vec{y})$ erzeugt werden, in verschiedene Komponenten zerlegen kann. Diese Komponenten haben eine wichtige physikalische Bedeutung und tragen unterschiedlich stark im Bereich weit entfernt von der Quelle bei.

Wir nehmen an, dass die Quellen des elektrischen/magnetischen Feldes in einem Gebiet A mit Ausdehnung a um den Ursprung lokalisiert sind. Das zugehörige Skalarpotential Φ kann für eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\vec{y})$ geschrieben werden als

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (6.8)$$

Man erwartet, dass das Potential in der Region $|\vec{x}| \gg a$ so aussieht wie das Potential einer Punktladung, die sich innerhalb von A befindet und die Ladung $Q = \int d^3y \rho(\vec{y})$ trägt. Dieses Verhalten werden wir reproduzieren, indem wir den Term $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ für ein festgehaltenes \vec{x} in eine Taylorreihe für kleine \vec{y} um den Punkt $\vec{y} = 0$ entwickeln. Für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ wird die Wahl von \vec{y} herausfallen, für endliche \vec{x} beeinflusst die Wahl von \vec{y} das Ergebnis jedoch.

- a) Berechne die Taylorreihe von $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/|\vec{x}|^4)$, und benutze das Ergebnis, um das elektrische Potential einer Ladungsverteilung zu entwickeln als

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|} \left[Q + \frac{x_i}{|\vec{x}|^2} Q_i + \frac{x_i x_j}{2|\vec{x}|^4} Q_{ij} + \frac{x_i x_j x_k}{6|\vec{x}|^6} Q_{ijk} \right] + \mathcal{O}(1/|\vec{x}|^5). \quad (6.9)$$

Bestimme die totale Ladung Q , das Dipolmoment Q_i , das Quadrupolmoment Q_{ij} und das Oktupolmoment Q_{ijk} .

- b) Nun wenden wir uns einer konkreten Ladungsverteilung ρ zu, die durch einen endlichen Dipol, der aus einer Ladung $+\lambda q$ am Punkt $(0, 0, 1/(2\lambda))$ und einer Ladung $-\lambda q$ am Punkt $(0, 0, -1/(2\lambda))$ besteht. Berechne Q , Q_i , Q_{ij} und Q_{ijk} . Zeige, dass wir nur im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ einen perfekten Dipol erhalten (d.h. dass alle anderen Momente der Multipolentwicklung verschwinden).
- c) Die kartesischen Komponenten A_i des Vektorpotentials können auf dieselbe Weise berechnet werden wie das Skalarpotential, d.h.

$$A_i(\vec{x}) = \mu_0 \int d^3y j_i(\vec{y}) \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (6.10)$$

Zeige, dass der erste Term in der Multipolentwicklung für eine zeitlich konstante Stromdichte verschwindet, und berechne das Vektorpotential bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung.

→

6.4. Multipolmomente in kartesischen und Kugelkoordinaten

In dieser Aufgabe werden wir die Relation zwischen sphärischen und kartesischen Quadrupolmomenten untersuchen. Betrachte das kartesische Quadrupolmoment

$$Q_{ij} = Q_{ji} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (3x_i x_j - \delta_{ij} \vec{x}^2), \quad (6.11)$$

und die sphärischen Quadrupolmomente

$$q_{lm} = \int dr d\vartheta d\varphi \sin \vartheta \rho(\vec{x}) r^{2+l} Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi). \quad (6.12)$$

Drücke die kartesischen Multipolmomente Q_{ij} durch die sphärischen für $l = 2$ aus und benutze dabei die folgenden Identitäten,

$$\begin{aligned} Y_{2,\pm 2}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}, \\ Y_{2,\pm 1}(\vartheta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{15}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}, \\ Y_{2,0}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \cos^2 \vartheta - 1). \end{aligned} \quad (6.13)$$

6.5. Magnetfeld in einem nicht-koaxialen Hohlzylinder

Betrachte einen unendlich langen leitenden Zylinder mit Radius a , aus dem ein ebenfalls zylinderförmiger Hohlraum mit Radius b ausgeschnitten ist. Der Abstand zwischen den parallelen Achsen sei d , und $d + b < a$. Die homogene Ladungsdichte \vec{j} fließe durch den ladenden Teil des Zylinders. Berechne das Magnetfeld \vec{B} im Hohlzylinder.

Hinweis: Verwende das Superpositionsprinzip und das Ampèresche Gesetz,

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S d^2x \vec{n} \cdot \vec{j}. \quad (6.14)$$

6.6. Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife

Betrachte einen leitenden Draht in der Form eines Kreises mit Radius R im Zentrum der x - y -Ebene. Ein konstanter Strom I fließe gegen den Uhrzeigersinn durch diese Schleife.

- Berechne das Magnetfeld \vec{B} an einem beliebigen Punkt auf der z -Achse.
- Berechne nun das Magnetfeld \vec{B} an einem beliebigen Punkt in der x - y -Ebene.

6.7. Magnetfeld eines geknickten Drahtes

Ein unendlicher Draht mit konstantem Strom I verläuft entlang der positiven y -Achse, knickt am Ursprung ab und verläuft dann entlang der positiven x -Achse. Zeige, dass das Magnetfeld \vec{B} in der x - y -Ebene für $x, y > 0$ gegeben ist durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \vec{e}_z. \quad (6.15)$$

7.1. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Betrachte ein Punktteilchen, das die Ladung q trägt und sich in einem elektromagnetischen Feld, beschrieben durch ein Vektorpotential \vec{A} und ein skalares Potential Φ , befindet. Die Lagrangefunktion des Teilchens ist gegeben durch

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - q\Phi(\vec{x}, t), \quad (7.1)$$

wobei \vec{x} die Position des Teilchens ist und m seine Masse.

a) Bestimme den kanonischen Impuls \vec{p} ,

$$\vec{p} = \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{\vec{x}}}. \quad (7.2)$$

Was ist die Relation zwischen dem kanonischen Impuls \vec{p} und dem kinetischen Impuls $m\dot{\vec{x}}$? Bestimme die Hamiltonfunktion mithilfe einer Legendretransformation,

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t). \quad (7.3)$$

b) Leite aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ her, dass

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j = \left(\dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right)_i. \quad (7.4)$$

c) Leite aus den Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (7.5)$$

die Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld her

$$m\ddot{\vec{x}} = q \left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right). \quad (7.6)$$

7.2. Induktion im Magnetfeld

Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld \vec{B} parallel zur z -Achse. Im Magnetfeld befindet sich ein leitender Draht in der Form eines Kreises mit Radius R , der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert. Die Rotationsachse liege in der Ebene des Leiters und verlaufe durch seinen Mittelpunkt. Sie bilde mit der Magnetfeldrichtung den Winkel φ . Berechne die im Leiter induzierte Spannung U als Funktion der Zeit.

7.3. Selbstinduktion eines Koaxialkabels

Ein Koaxialkabel bestehe aus zwei coaxialen leitenden Zylinderschalen mit den Radien R_1 und R_2 mit $R_1 < R_2$. Durch jede der beiden Zylinderschalen fließe entlang ihrer Achsen ein Strom I in entgegengesetzter Richtung. Berechne die Selbstinduktion pro Längeneinheit für das Koaxialkabel.

Hinweis: Bestimme zuerst das Magnetfeld des Kabels und dann aus der magnetischen Energie des Kabels seine Selbstinduktion über

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2. \quad (7.7)$$

8.1. Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation und ihre Inverse seien gegeben durch

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (8.1)$$

Berechne die Fourier-Transformierten folgender Funktionen. Dabei haben die Funktionen f und g die Fourier-Transformierten \tilde{f} und \tilde{g} .

- a) $af(\vec{x}) + bg(\vec{x}) \quad (a, b \in \mathbb{C})$,
- b) $\vec{\nabla} f(\vec{x})$,
- c) $f(\vec{x}) g(\vec{x})$,
- d) $f(\vec{x}) = f^*(\vec{x})$,
- e) $\delta^3(\vec{x})$,
- f) $\vec{\nabla} \delta^3(\vec{x})$.

8.2. Elliptisch polarisierte Wellen

Eine Welle $\vec{E}(\vec{x}, t)$ mit Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{e}_z$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E_x(\vec{x}, t) &= A \cos(kz - \omega t), \\ E_y(\vec{x}, t) &= B \cos(kz - \omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (8.2)$$

- a) Die Bahn des Vektors $\vec{E}(0, t)$ beschreibt die Polarisation der Welle. Zeige, dass sie eine Ellipse ist. Für welche Werte von A, B und φ ist diese Bahn ein Kreis?
Hinweis: Die Gleichung einer Ellipse lautet

$$aE_x^2 + 2bE_xE_y + cE_y^2 + f = 0, \quad (8.3)$$

- b) Zeige, dass für allgemeine A und B die Welle als Superposition zweier entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen geschrieben werden kann,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_+(z, t) + \vec{E}_-(z, t), \quad (8.4)$$

wobei $E_{\pm}(z, t) = \text{Re}(A_{\pm}\vec{e}_{\pm}e^{i(kz-\omega t)})$. Hier sind A_{\pm} Konstanten und $\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)$. Bestimme A_{\pm} als Funktion von A, B und φ .

Hinweis: Schreibe die Welle als Realteil eines komplexen Vektors und löse \vec{e}_{\pm} nach \vec{e}_x und \vec{e}_y auf.

→

8.3. Gruppengeschwindigkeit

Ein Gaussches Wellenpaket $\phi(x, t)$ bewege sich in einem dispersiven Medium (d.h. $\omega(k)$ hängt nicht-linear von k ab). Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei

$$\phi(x, t = 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}\right), \quad (8.5)$$

wobei wir Δx als Mass für die räumliche Ausdehnung des Wellenpakets auffassen. Die Zeitentwicklung ist gegeben durch

$$\phi(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(k) e^{ikx - i\omega(k)t}, \quad (8.6)$$

wobei $\tilde{\phi}(k)$ die Fourier-Transformierte von $\phi(x, t = 0)$ sei.

- a) Zeige mittels quadratischer Ergänzung, dass das Wellenpaket bei $t = 0$ auch im Fourier-Raum ein Gaussches Profil hat. Welches Verhältnis besteht zwischen Δx und dem analog definierten Δk ? Was bedeutet dies?

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{2\pi} |\sigma|. \quad (8.7)$$

- b) Zeige, dass sich das Maximum des Wellenpakets in der Zeit t vom Ursprung um die Strecke $v_g t$ fortbewegt, wobei die *Gruppengeschwindigkeit* v_g gegeben ist durch

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}. \quad (8.8)$$

Hier sei k_0 die Wellenzahl am Maximum von $\tilde{\phi}(k)$.

Hinweis: Entwickle $\omega(k)$ bis zur ersten Ordnung in k um k_0 , und ermittle die Änderung des Maximums des Wellenpakets mittels (8.6).

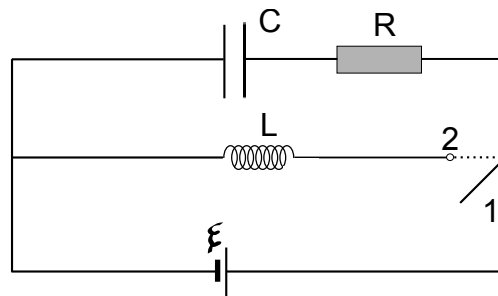
- c) Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die einzelnen Phasen? Unter welcher Bedingung sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Welle gleich?
- d) Schätze ab, wie schnell sich das Wellenpaket verbreitert, indem Du einen Ausdruck für die Variation der Gruppengeschwindigkeit innerhalb des Pulses findest. Benutze dann die Relation zwischen Δk und Δx aus Teil a) und interpretiere das Ergebnis dementsprechend.

Hinweis: Schätze die Variation als Differenz Δv_g der Gruppengeschwindigkeiten für k_0 und $k_0 + \Delta k$ (analog zu (8.8)) ab und bestimme Δv_g durch Entwicklung von $\omega(k)$ um k_0 bis zur ersten beitragenden Ordnung.

9.1. Dynamik eines elektrischen Schaltkreises

Betrachte den Schaltkreis in (9.1). Er bestehe aus einer Spannungsquelle ξ , einem Widerstand R , einem Kondensator der Kapazität C und einer Spule der Induktivität L . Das Ohmsche Gesetz, $U_R = IR$, besagt, dass der Spannungsabfall an einem Widerstand proportional zur Stromstärke ist, die durch den Widerstand fließt.

Hinweis: Die drei Elemente werden durch folgende Gleichungen beschrieben: $U = RI$, $Q = CU$, $U = L\dot{I}$.



(9.1)

- a) Wenn der Schalter auf Position 1 steht, bilden Spannungsquelle, Widerstand und Kondensator einen Stromkreis. Der Kondensator sei anfangs entladen. Stelle für Schalterposition 1 eine Differentialgleichung für die Ladung des Kondensators auf, löse sie, und berechne die Zeit, nach der der Kondensator den Bruchteil $(1 - 1/e)$ seiner Maximalladung trägt.

Wenn der Schalter auf Position 2 steht, bilden Kondensator, Widerstand und Spule einen Stromkreis. Der Kondensator sei vollständig geladen, wenn der Schalter auf Position 2 gesetzt wird ($t = 0$). Dementsprechend fließe zur Zeit $t = 0$ kein Strom im Stromkreis.

- b) Stelle für Schalterposition 2 eine Differentialgleichung für die Ladung des Kondensators im Fall $R = 0$ auf, löse sie, und bestimme die Eigenfrequenz des Stromkreises.
- c) Setze nun $R > 0$. Stelle die entsprechende Differentialgleichung auf, löse sie und skizziere die Ladung des Kondensators als Funktion der Zeit. Diskutiere die drei verschiedenen Fälle, die auftreten können.

→

9.2. Der Poynting-Vektor

Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum sind gegeben durch

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}}, \quad (9.2)$$

und die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

a) Zeige die folgende Identität,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (c^2 \vec{B}^2 + \vec{E}^2) = -c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (9.3)$$

b) Betrachte ein Teilchen der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem elektromagnetischen Feld bewege. Zeige, dass die Ableitung seiner kinetischen Energie gegeben ist durch

$$\dot{W}_{\text{kin}} = q \vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (9.4)$$

Was ist das Äquivalent für eine kontinuierliche Ladungsverteilung?

c) Beweise den Satz von Poynting,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V d^3x (c^2 \vec{B}^2 + \vec{E}^2) + W_{\text{kin}} \right) = - \int_{\partial V} d^2x \vec{n} \cdot \vec{S}, \quad (9.5)$$

wobei V ein beliebiges Volumen und ∂V dessen Oberfläche sei. Setze für \dot{W}_{kin} das Ergebnis aus b) ein. Interpretiere die physikalische Bedeutung eines jeden Terms.

d) Zeige, dass der zeitgemittelte Poynting-Vektor für eine ebene Welle in einem nichtleitenden Medium geschrieben werden kann als

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*), \quad (9.6)$$

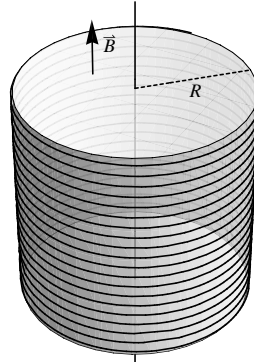
wobei \vec{E}_0 und \vec{B}_0 die komplexen Amplituden des elektrischen bzw. magnetischen Feldes mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ sind,

$$\vec{E}(t) = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\omega t}), \quad \vec{B}(t) = \text{Re}(\vec{B}_0 e^{i\omega t}). \quad (9.7)$$

Hinweis: Berechne den Mittelwert für eine Periode T ,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt. \quad (9.8)$$

10.1. Feynmansches Paradoxon



(10.1)

Betrachte einen langen geraden Draht entlang der z -Achse, der die gleichförmige Ladungsdichte λ trage und von einer genauso langen, zylindrischen Schale aus einem nichtleitendem Material umgeben sei, die eine gleichförmige Oberflächenladungsdichte σ trage. Der Radius der Zylinderschale sei R . Die Werte für σ und λ seien so gewählt, dass die Netto-Ladung pro Längeneinheit verschwinde. Weiter sei die Zylinderschale mit einem (isolierten) leitenden Draht umwickelt, wobei die Windungszahl pro Länge n sei. Die Zylinderschale könne ohne Reibung um ihre Symmetrieachse rotieren und habe die Masse pro Längeneinheit ρ (einschließlich des umwickelten Drahtes).

Das System sei anfangs in Ruhe, wobei der Strom i_0 durch die Zylinderspule fließe. Dieser Strom nehme dann ab, bis er verschwindet, z.B. weil er von einer Batterie am Ende ihrer Lebenszeit gespeist wird.

- Berechne das Drehmoment $d\vec{M}$, das die Änderung des elektrischen Feldes aufgrund der Stromänderung auf eine Scheibe der Zylinderschale mit Höhe dz ausübt.
- Berechne das Magnetfeld, das von einer Zylinderschale mit Oberflächenladungsdichte σ erzeugt wird, die mit Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse rotiert.
- Berechne die finale Winkelgeschwindigkeit ω_f des System durch Zeit-Integration über das Drehmoment. Berücksichtige den finalen magnetischen Fluß aufgrund der Bewegung von Ladungen.

Die betrachtete Situation scheint zu einem Paradoxon zu führen: Es gibt keine externen Drehmomente, die auf die Zylinderspule wirken, aber ihr Drehimpuls scheint sich während des Experiments von 0 auf einen endlichen Wert zu ändern. Der zweite Teil dieser Übungsaufgabe soll zur Auflösung dieses scheinbaren Widerspruches führen.

- Bestimme den Poynting-Vektor \vec{S} innerhalb der Zylinderschale für ein allgemeines statisches, konstantes magnetisches Feld \vec{B} entlang der z -Achse; verwende das Resultat zur Berechnung des Drehimpulses, der im Zusammenhang mit der elektromagnetischen Feldkonfiguration steht.
- Schreibe das entsprechende Drehimpulserhaltungsgesetz auf und verwende es, um das Resultat für ω_f zu bestätigen. Erkläre, warum das Argument, das zu einer Inkonsistenz führen würde, hier nicht anwendbar ist.

→

10.2. Ebene Wellen im leitenden Medium

- a) Betrachte eine ebene Welle im freien Raum. Leite die Wellengleichungen für das elektromagnetische Feld aus den Maxwellgleichungen her. Zeige, dass die ebene Welle,

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) \end{Bmatrix} = \text{Re} \left[\begin{Bmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{Bmatrix} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t) \right], \quad (10.2)$$

eine Lösung dieser Gleichungen ist und finde die Dispersionsrelation. Was ist die Wellengeschwindigkeit?

- b) Nun betrachten wir ein Medium mit endlicher Leitfähigkeit $\sigma > 0$. In einem solchen Medium sind die Stromdichte und das elektrische Feld verbunden über $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Leite in diesem Fall die Wellengleichung für das elektromagnetische Feld her und zeige, dass die Amplitude einer ebenen Welle mit der Eindringtiefe in das Medium abfällt.
- c) Berechne für eine niederfrequente Welle die Eindringtiefe δ , die beschreibt, wie weit eine ebene Welle in das Medium eindringen kann. δ wird per Konvention als die Tiefe definiert, bei der die Amplitude der Welle um einen Faktor e abgefallen ist.

11.1. Rechteckiger Hohlleiter

Betrachte einen unendlich langen Hohlleiter entlang der z -Achse, der einen rechteckigen Querschnitt $0 < x < d_x$ und $0 < y < d_y$ habe. Die Wände seien ideale Leiter. Aufgrund der Geometrie können wir folgenden Ansatz für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen machen,

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}(\vec{E}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}), \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}(\vec{B}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}).\end{aligned}\tag{11.1}$$

- a) Die 3D-Vektoren zerfallen in 2D-Vektoren (hier: x - und y -Komponenten) und Skalare (z -Komponente). Leite die Gleichungen für die x - und y -Komponenten von \vec{E}_0 und \vec{B}_0 in Abhängigkeit ihrer z -Komponenten aus den Maxwell-Gleichungen her und zeige, dass die folgenden Gleichungen gelten,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] E_z &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] B_z &= 0.\end{aligned}\tag{11.2}$$

- b) Drücke die Randbedingungen $E_{\parallel} = B_{\perp} = 0$ als Bedingungen an die z -Komponenten der Felder aus.
- c) Bestimme die Lösungen für sogenannte transversal-magnetische Wellen (TM-Wellen), für die $B_z = 0$ gilt.
- d) Zeige, dass es im idealen Hohlleiter keine transversal-elektromagnetischen (TEM) Wellen (d.h. Wellen mit $E_z = B_z = 0$) gibt.

Hinweis: Benutze den Gaußschen Satz und das Faradaysche Gesetz, sowie die Randbedingungen für E_{\parallel} , um zu zeigen, dass es keine TEM-Wellen in diesem Hohlleiter gibt.

→

11.2. Dipolstrahlung

Ein dünner, perfekt leitender Draht verbindet zwei kleine Metallkugeln bei $z = \pm a$. Die Ladungsdichte ist

$$\rho(\vec{x}, t) = Q \delta(x) \delta(y) [\delta(z - a) - \delta(z + a)] \cos(\omega t) \quad (11.3)$$

mit a , Q und ω konstant. Der Strom zwischen den Metallkugeln fließt entlang des Drahtes.

a) Berechne die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung $\langle dP/d\Omega \rangle$ im zeitliche Mittel. *Hinweis:* Berechne zuerst das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{x}, t)$ aus der Stromdichte \vec{j} durch den Draht und mache vereinfachende Näherungen.

b) Berechne $\langle dP/d\Omega \rangle$ in Dipolnäherung mit Hilfe der Formel

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \left\langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \right\rangle \frac{\sin^2 \vartheta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3}. \quad (11.4)$$

12.1. Optik gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht, welches sich zwischen zwei Raumpunkten \vec{x}_1 und x_2 bewegt, den Pfad wählt, der die optische Weglänge minimiert. Letztere ist gegeben durch

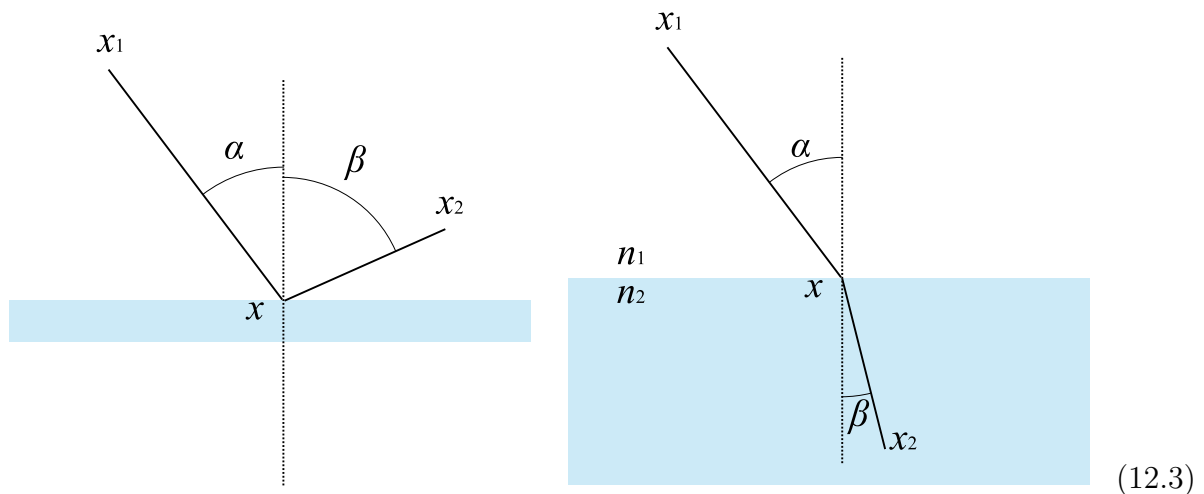
$$S = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} n(\vec{x}) dl, \quad (12.1)$$

wobei $n(\vec{x})$ den Brechungsindex des Mediums bezeichnet und $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ die Länge des infinitesimalen Teilstückes der Trajektorie, die \vec{x}_1 mit \vec{x}_2 verbindet. Dies kann direkt als das Prinzip der kleinsten Wirkung interpretiert werden.

Hinweis: Es empfiehlt sich, die Trajektorie für das Integral folgendermaßen zu parametrisieren,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} n(\vec{x}(t)) \frac{dl}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} n(\vec{x}(t)) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} dt. \quad (12.2)$$

- a) Bestimme die Trajektorie eines Lichtstrahles zwischen zwei Raumpunkten in einem homogenen Medium.



- b) Betrachte nun Licht, das von einem ebenen Spiegel reflektiert wird. Der Lichtstrahl bewege sich von \vec{x}_1 im Vakuum zu einem Punkt \vec{x} auf der Oberfläche des Spiegels und von dort wieder im Vakuum zum Punkt \vec{x}_2 . Minimiere die Wirkung über alle möglichen Punkte \vec{x} auf dem Spiegel und vergleiche für den resultierenden Punkt \vec{x} Einfallswinkel und Ausfallswinkel.
- c) Betrachte schließlich Licht, das sich zwischen zwei Medien mit verschiedenen Brechungsindizes n_1 und n_2 bewegt. Die Begrenzungsfläche zwischen den beiden Medien sei eben. Betrachte einen Lichtweg von Punkt \vec{x}_1 im Medium mit n_1 zu einem Punkt \vec{x}_2 im Medium mit n_2 , der die Begrenzungsfläche an dem Punkt \vec{x} passiert, der die Wirkung minimiert. Bestimme die Beziehung zwischen Einfallswinkel und Ausfallswinkel (Snelliussches Brechungsgesetz).

→

12.2. Brechung von ebenen Wellen

Eine ebene Welle falle senkrecht auf eine ebene Schicht zwischen zwei Medien. Die Brechungsindizes der drei nichtmagnetischen Medien seien n_1 , n_2 und n_3 . Die Dicke der Zwischenschicht sei d , während die anderen beiden Medien jeweils einen Halbraum füllen.

- a) Berechne die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten (d.h. den reflektierten bzw. transmittierten Energiestrom bezogen auf den einfallenden Energiestrom).

Hinweis: Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte einer komplexen Welle ist gegeben durch

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*). \quad (12.4)$$

- b) Das Medium mit dem Brechungsindex n_1 sei Teil eines optischen Systems (z.B. einer Linse), während das Medium mit Brechungsindex n_3 aus Luft bestehe ($n_3 = 1$). Die Oberfläche des ersten Mediums soll mit einer Schicht (Brechungsindex n_2) versehen werden, so dass bei einer bestimmten Frequenz ω_0 keine reflektierende Welle auftritt. Welche Dicke d und welchen Brechungsindex n_2 muss diese Schicht haben?

12.3. Lichtstreuung

Die klassische Theorie der Lichtstreuung (bekannt als Rayleigh-Theorie) wird verwendet, um die Streuung von Licht an kleinen Molekülen (mit einer im Vergleich zur Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes viel kleineren Ausdehnung) zu beschreiben. Hier betrachten wir elektrisches und magnetisches Feld sowie die Intensität von Licht, das an kleinen Teilchen gestreut wird.

- a) Betrachte zunächst eine ebene monochromatische Lichtwelle, die sich in x -Richtung ausbreitet und in z -Richtung polarisiert ist. Diese Welle wird an einem kleinen polarisierbaren, aber nicht magnetisierbaren Teilchen im Ursprung gestreut. Die einfallende Welle induziert im Teilchen ein Dipolmoment, das zum lokalen Feld proportional ist, $\vec{p}(t) = \alpha \vec{E}(0, t)$, wobei α seine Polarisierbarkeit ist. Bestimme elektrisches und magnetisches Feld der gestreuten Welle an einem Punkt \vec{x} im Fernfeld in Abhängigkeit vom einfallenden Feld E_0 , dem Abstand vom Ursprung r und dem Winkel ϑ zwischen \vec{x} und der z -Achse.

- b) Berechne die Intensität dieser gestreuten Lichtwelle an einem solchen Punkt \vec{x} im Fernfeld des streuenden Teilchens

Hinweis: Verwende den Poynting-Vektor.

- c) Verwende die in der vorigen Aufgabe hergeleitete Wellenlängenabhängigkeit ($\propto 1/\lambda^4$) der Streuwelle, um die blaue Farbe des wolkenlosen Himmels sowie die rote Farbe von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang qualitativ zu erklären.

13.1. Beugung an einem rechteckigen Spalt

Ein rechteckiger Spalt mit Seitenlängen a und b ($b \geq a$) und Eckkoordinaten $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$ liege innerhalb einer flachen, perfekt leitenden Platte, die die xy -Ebene ausfülle. Eine ebene, in z -Richtung propagierende Welle mit linearer Polarisierung im Winkel α zur y -Achse, treffe auf den Spalt.

- a) Berechne die gebeugten Felder und Intensitäten pro Raumwinkelement mit Hilfe der vektoriellen Smythe-Kirchhoff-Beziehung,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{ie^{ikr}}{2\pi r} \vec{k} \times \int_A d^2x' \vec{n} \times \vec{E}(\vec{x}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'}, \quad (13.1)$$

unter der Annahme, dass das tangential elektrische Feld im Spalt gleich dem ungestörten einfallenden Feld ist.

- b) Berechne das entsprechende Resultat mit Hilfe der skalaren Kirchhoff-Näherung.

13.2. Invarianter Abstand

Zeige, daß das Abstandsquadrat $s_{12}^2 = s_{12,\mu}^\mu$ ($s_{12} = x_1 - x_2$) zweier Raumzeit-Punkte x_1 und x_2 , ein Lorentz-Skalar ist, d.h. $s_{12}^2 = s_{12}^{\prime 2}$. Benutze dazu einen Lorentz-Boost mit beliebiger Richtung und Geschwindigkeit,

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{x} \cdot \vec{v}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + (\gamma - 1) \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v}, \quad (13.2)$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

- a) Bringe zunächst die obige Transformation in Matrixform,

$$x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu. \quad (13.3)$$

- b) Wähle nun $\vec{v} = (1, 0, 0)v$ und zeige, dass Λ eine Lorentztransformation definiert, d.h.

$$\Lambda^\lambda_\mu \eta_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (13.4)$$

- c) Zeige schließlich, dass das Abstandsquadrat Lorentz-invariant ist.

→

13.3. Elektromagnetischer Feldtensor

Der elektromagnetische Feldtensor wird definiert als

$$F_{\mu\nu} := -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.5)$$

- a) Zeige, dass der elektromagnetische Feldtensor invariant ist unter der Eichtransformation

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (13.6)$$

für ein beliebiges skalares Feld χ .

- b) Der duale elektromagnetische Feldtensor wird definiert als

$$\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (13.7)$$

Bestimme die Matrix $\tilde{F}_{\mu\nu}$.

- c) Berechne die Kontraktionen $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

13.4. Lienard–Wiechert Potential

Betrachte eine Ladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v geradlinig entlang der positiven z -Achse ausgehend von $z = 0$ bei $t = 0$ bewege. Zeige, dass ihr skalares Potential gegeben ist durch

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(x^2 + y^2)}}. \quad (13.8)$$