# Quantenmechanik II. Übung 1.

*HS14* *Abgabe:* Di 4. März 2014

### 1. Drehimpulsmatrizen

Bestimme die Matrizen $M_i$, $(i = 1, 2, 3, +, -)$ des Drehimpulses in der Darstellung $\mathcal{D}_1$ bezüglich der Normalbasis $\{|j = 1, m\rangle\}_{m=-1}^{1}$.

### 2. Die Holstein-Primakoff Transformation

Die Auf- und Absteigeoperatoren $M_\pm$ wirken auf die Vektoren $\{|j, m\rangle\}_{m=-j}^{j}$ der Darstellung $\mathcal{D}_j$ gemäss (7.27). Es besteht augenscheinlich eine Ähnlichkeit zur Wirkung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, $a^*$ und $a$, auf die Eigenzustände eines harmonischen Oszillators,

$$\begin{aligned} a^*|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \,, \qquad (n = 0, 1, \ldots) \,, \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \,, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \,. \end{aligned}$$

Die Entsprechung ist im Folgenden Sinn exakt. Ausgehend von $[a, a^*] = 1$ definiere die Operatoren

$$M_+ = a^*\sqrt{2j - a^*a} \,, \qquad M_- = \sqrt{2j - a^*a}\, a \,, \qquad M_3 = a^*a - j$$

und die Zustände

$$|j, m\rangle = |n = j + m\rangle \,, \qquad (m = -j, \ldots, j) \,.$$

Zeige, dass die Operatoren die Vertauschungsrelationen (7.18) und $\vec{M}^2 = j(j+1)\mathbb{1}$ erfüllen; ebenso die Zustände Gl. (7.27). Insbesondere lassen Erstere den durch $\{|j, m\rangle\}_{m=-j}^{j} = \{|n\rangle\}_{n=0}^{2j}$ aufgespannten Raum invariant.

### 3. Projektive Darstellungen der Gruppe $(\mathbb{C}, +)$

In der Aufgabe 13.1 der Quantenmechanik I wurde gezeigt, dass jede projektive Darstellung der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ durch passende Umeichung einer (ordentlichen) Darstellung entspricht. Die Behauptung trifft nicht zu, wenn $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ersetzt wird. In der Tat: Man zeige dass die Translationen im Phasenraum, vgl. (3.47),

$$V(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^* - \bar{\alpha} a} \,, \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

ein Gegenbeispiel zu einer solchen Behauptung liefern.

*Hinweis:* Für eine projektive Darstellung $U$ einer abelschen (d.h. kommutativen) Gruppe $G \ni g, h$ gilt $U_g U_h = \varphi(g, h) U_h U_g$ mit einer Phase $\varphi(g, h) \in \mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Wie ändert sich die Phase unter einer Eichtransformation $U_g \mapsto \lambda(g) U_g$ mit $\lambda(g) \in \mathrm{U}(1)$? Was folgt daraus, falls $U$ äquivalent ist zu einer (ordentlichen) Darstellung? Vergleiche dies mit Gl. (U8.7) aus der Quantenmechanik I.