Quantenmechanik II. Übung 4.

FS14 *Abgabe:* Di 25. März 2014

1. Ammoniak-Maser

Systeme, bei denen es nur auf einen zweiwertigen Freiheitsgrad ankommt, haben die selbe allgemeine Beschreibung wie ein Spin-$\frac{1}{2}$, obschon dessen Komponenten nicht mehr räumlich zu verstehen sind. Ein Beispiel ist das Ammoniak-Molekül NH_3: Das N-Atom kann sich auf einer der beiden Seiten der Ebene befinden, die durch die H-Atome aufgespannt wird. Das Molekül besitzt die entsprechenden Zustände $|+\rangle$, $|-\rangle$ mit Dipolmoment $\pm d$. Grund- und angeregter Zustand des Moleküls sind

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) , \qquad |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) ,$$

mit Energiedifferenz ε.

Moleküle werden im Zustand $|a\rangle$ in eine Kavität injiziert. Dort werden sie durch ein zur Ebene senkrechtes elektrisches Feld $E(t)$ stimuliert, einen Übergang nach $|g\rangle$ zu machen. (Die dabei ausgesandte Strahlung verstärkt das Feld: "Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation").

i) Begründe: Der Hamiltonoperator in der Basis $|a\rangle$, $|g\rangle$ ist

$$H(t) = \frac{\varepsilon}{2}\sigma_3 - d\vec{\mathcal{E}}(t) \cdot \vec{\sigma} \tag{1}$$

mit $\vec{\mathcal{E}}(t) = E(t)\vec{e}_1$. ($\vec{\mathcal{E}}$ ist nicht das elektrische Feld.)

ii) Für $E(t) = E\cos(\omega t)$ wird die Lösung der Schrödinger-Gleichung vereinfacht durch die sogenannte *Approximation der rotierenden Welle*:

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \frac{E}{2}(\vec{e}_1 \cos(\omega t) + \vec{e}_2 \sin(\omega t)) . \tag{2}$$

Wie ist die Frequenz ω und die Aufenthaltsdauer $0 \le t \le t_0$ in der Kavität zu wählen, damit die Moleküle am Schluss im Zustand $|g\rangle$ sind?

Hinweis: Richtig betrachtet ist der Hamiltonoperator der selbe wie in Aufgabe 2.2, Gl. (1, 6). Rechnungen können so weitgehend vermieden werden.

2. Anregung eines Atoms durch ein geladenes Teilchen

Ein Atom bestehe aus n Elektronen (Ladung e) und einem Kern, der fest bei $\vec{x} = 0$ ist. Seien $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$ zwei Eigenzustände der Energie und ω_{10} die Bohrsche Frequenz des Übergangs $0 \to 1$. Sei schliesslich a ($\simeq$ Bohr-Radius) die Grösse des Atoms.

Ein weiteres Teilchen der Ladung q fliege am Atom vorbei. Es sei so schwer oder so schnell, dass seine Bewegung als eine klassische Trägheitsbahn $\vec{x}(t)$ gelten darf: Geschwindigkeit v in Richtung $\vec{e}_0$ und Stossparameter $\vec{b} \perp \vec{e}_0$. Die Störung des Atoms ist dann

$$H_1(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{qe}{|\vec{x}(t) - \vec{x}_k|} ,$$

wobei der Operator $\vec{x}_k$ der Ort des k-ten Elektrons ist. Sie kann einen Übergang $0 \to 1$ hervorrufen.

i) Entwickle $H_1(t)$ für $|\vec{x}(t)| \gg a$ (was $b \gg a$ voraussetzt) nach Potenzen von $\vec{x}_k$ bis zur Ersten und schreibe einen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit $W_{1\leftarrow 0}$ in erster Ordnung Störungsrechnung.

Hinweis: Verwende den Ausdruck (8.3) aus der Vorlesung für eine Störung $H_1(t) \to 0$, $(t \to \pm\infty)$.

ii) Zeige, dass für $a \ll b \ll v/\omega_{10}$

$$W_{1\leftarrow 0} = \frac{4q^2}{\hbar^2 b^2 v^2} |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2 \,, \tag{3}$$

wobei $\vec{b} = b\vec{e}$ und $\vec{D}$ das Dipolmoment des Atoms ist.

Hinweise: Für welche Zeiten t ist die Störung $H_1(t)$ von Bedeutung? $\int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{-3/2} ds = 2$.

Man überlege heuristisch, dass $W_{1\leftarrow 0}$ für $b \gtrsim v/\omega_{10}$ viel rascher abfällt, als (3) angibt; und für $b \lesssim a$, wo das Ergebnis von (i) nicht gilt, $W_{1\leftarrow 0}$ nicht divergiert.

iii) Pro Zeit- und Flächeneinheit mögen N Teilchen in Richtung $\vec{e}_0$ anfliegen. Leite die Übergangsrate

$$\Gamma_{1\leftarrow 0} \approx \frac{8\pi N q^2}{\hbar^2 v^2} \log\left(\frac{v}{a\omega_{10}}\right) \left\langle |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2 \right\rangle \tag{4}$$

her, für $v/\omega_{10} \gg a$. Dabei bezeichnet $\langle \cdot \rangle$ den Mittelwert über $\vec{e} \perp \vec{e}_0$.

Nebenbei: Die Anregung oder Ionisierung eines Atoms durch ein vorbei fliegendes Teilchen ist die Grundlage der meisten Teilchendetektoren.