Quantenmechanik II. Übung 6.

FS14 *Abgabe:* Di 8. April 2014

1. Das Jaynes-Cummings-Modell, Teil 1

In der Vorlesung wurde die Wechselwirkung eines Atoms mit dem quantisierten Strahlungsfeld beschrieben anhand des Hamiltonoperators

$$
\begin{gathered}
H = H_0 + H_1 \ , \qquad H_0 = H_{\mathrm{at}} + H_{\mathrm{str}} \ , \\
H_{\mathrm{str}} = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha a_\alpha^* a_\alpha \ , \qquad H_1 = -\frac{1}{c}\vec{A}(0)\cdot\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{\mathrm{at}}, \vec{D}] \ , \\
\vec{A}(\vec{x}) = \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}}(a_\alpha + a_\alpha^*)\vec{A}_\alpha(\vec{x}) \ .
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Die Berechnung der Übergangsraten verwendete ein Quantisierungsvolumen als Hilfsmittel, dessen Volumen sie entsprechend nach Unendlich streben liess. Der spontane Zerfall eines angeregten Atoms ist irreversibel im Einklang mit der Tatsache, dass das ausgesandte Photon ins räumlich Unendliche entweicht. Eine andere Physik tut sich auf, falls das Volumen einer realen Kavität entspricht, deren Abmessungen mit der Wellenlänge jenes Photons vergleichbar sind (mehr dazu in Teil 2 der Aufgabe in Übung 7). Das Interesse gilt einem Übergang zwischen zwei atomaren Zuständen $|g\rangle$ und $|a\rangle$ mit Bohrscher Frequenz ω_0; die Kavität besitze eine einzige Mode, deren Frequenz ω nahe bei ω_0 liegt. Unter Beibehaltung dieser beiden Zuständen und dieser einen Mode alleine wird aus (1)

$$
H_{\mathrm{at}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 \ , \qquad H_{\mathrm{str}} = \hbar\omega a^* a \ , \qquad H_1 = \hbar(a + a^*)(g\sigma_+ + \overline{g}\sigma_-) \ , \tag{2}
$$

auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$. Dabei beziehen sich

$$
\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

auf die Basis $|a\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $|g\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $\mathbb{C}^2$; ferner sind a, a^* Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf $\mathcal{H}$, dem Hilbertraum eines harmonischen Oszillators aufgespannt durch die Zustände $|n\rangle$ bestimmter Photonenzahl $n = 0, 1, \ldots$.

i) Führe die Kopplung $g \in \mathbb{C}$ auf Grössen in (1) zurück. Zeige, dass $g \geq 0$ erzielt werden kann durch Wahl der relativen Phase zwischen $|a\rangle$ und $|g\rangle$.

ii) Berechne $\tilde{H}_1(t)$ im Wechselwirkungsbild von H_0 und zeige, dass $a^*\sigma_+$ und $a\sigma_-$ zu Termen führen, die rasch oszillieren verglichen mit jenen, die von $a\sigma_+$ und $a^*\sigma_-$ stammen. Sie dürfen vernachlässigt werden (vgl. Approximation der rotierenden Welle in Aufgabe 4.1). *Hinweis:* $|\omega - \omega_0| \ll \omega, \omega_0$.

iii) Man gelangt so zu dem Hamiltonoperator des Jaynes-Cummings-Modells:

$$
H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + \hbar\omega a^* a + \hbar g(a\sigma_+ + a^*\sigma_-) \ . \tag{3}
$$

Berechne seine Eigenwerte. *Hinweis:* $\sigma_3/2 + a^*a$ ist eine Symmetrie. Wieso? Damit reduziert sich die Dimension des Eigenwertproblems auf höchstens 2.

2. Partielle Spur

Es soll noch einmal auf das Tensorprodukt zurück gekommen werden. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ der Hilbertraum eines Systems, das zusammengesetzt ist aus Zweien mit Hilberträumen $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, deren Dimensionen $n_i = \dim \mathcal{H}_i$ einfachheitshalber endlich sein sollen. Sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Operator. Die *partielle Spur* von A über $\mathcal{H}_2$ ist ein Operator auf $\mathcal{H}_1$, und zwar ist $\operatorname{tr}_2 A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ definiert durch die Eigenschaft

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{H}_1}((\operatorname{tr}_2 A)B) = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}} A(B \otimes \mathbb{1}) \tag{4}$$

für alle Operatoren B auf $\mathcal{H}_1$.

i) Sei $\{|v_j^{(i)}\rangle\}_{j=1}^{n_i}$ eine orthonormierte Basis für $\mathcal{H}_i, (i = 1, 2)$. Drücke die Matrixelemente $\langle v_j^{(1)}|(\operatorname{tr}_2 A)|v_k^{(1)}\rangle$ durch die von A in der Tensorproduktbasis aus.

ii) Es sei ρ eine Dichtematrix auf $\mathcal{H}$. Zeige, dass $\operatorname{tr}_2 \rho$ eine Dichtematrix auf $\mathcal{H}_1$ ist.

Hinweis: Ein Operator T ist selbstadjungiert, genau dann falls $\operatorname{tr}(TB)$ reell ist für jeden Operator $B = B^*$ auf dem selben (endlich-dimensionalen) Hilbertraum. Es gilt überdies $T \geq 0$, falls dabei $\operatorname{tr}(TB) \geq 0$ für $B \geq 0$. Gl. (4) besagt, dass $\operatorname{tr}_2 \rho$ der (gemischte) Zustand des Systems 1 ist, denn es liefert die Erwartungswerte im Zustand ρ von beliebigen Observablen B dieses Systems.

iii) Sei $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$ der Hilbertraum je eines Spins $\frac{1}{2}$ und sei $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ die Dichtematrix des Zustands

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}, -\vec{e}\rangle - |-\vec{e}, \vec{e}\rangle) \tag{5}$$

beider Spins, wobei $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{e}| = 1$ und $|\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = |\vec{e}_1\rangle \otimes |\vec{e}_2\rangle$. Berechne den Zustand $\operatorname{tr}_2 \rho$ und orte ihn in der Bloch-Kugel (7.84).