Quantenmechanik II. Übung 7.

FS 14 *Abgabe:* Di 15. April 2014

1. Das Jaynes-Cummings Modell, Teil 2

Das Modell beschreibt ein 2-Niveau-Atom und eine Mode des elektromagnetischen Felds. Der Hamilton-Operator ist durch Gl. (U6.3) aus Teil 1 der Aufgabe gegeben. Es soll gezeigt werden, dass der Zerfall des angeregten Zustands reversibel sein kann.

i) Der Anfangszustand $|a, n\rangle$ sei ein angeregtes Atom und n Photonen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P_g(t)$, das Atom zur Zeit t im Grundzustand zu finden.

Hinweis: Der Zustandsraum ist effektiv 2-dimensional, vgl. (U6.6). Die Antwort kann aus der Lösung von Aufgabe 2.2 (v) entnommen werden. Im dort vorkommenden rotierenden System ist der Hamiltonoperator

$$H = \frac{\hbar}{2}\big((\omega_0 - \omega)\vec{e}_3 + \omega_1 \vec{e}_1\big) \cdot \vec{\sigma} \, . \tag{1}$$

ii) Sei nun $\omega = \omega_0$ (Resonanz) und der Anfangszustand $|a, \alpha\rangle$, wobei

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \, , \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

ein kohärenter Zustand ist. Sei $P_a(t)$ die Wahrscheinlichkeit, das Atom zur Zeit t im angeregten Zustand zu finden. Schreibe $P_a(t)$ als Reihe in n. Stelle das Ergebnis für $|\alpha|^2 = 10$ graphisch als Funktion von $0 \le gt \le 30$ dar. Zu beobachten ist: Nach einem anfänglichen Zerfall des angeregten Zustands bleibt das Atom während längerer Zeit mit gleicher Wahrscheinlichkeit in beiden Zuständen, um dann wieder angeregt zu werden (Theorie: Eberly et al. (1980); Experiment: Rempe et al. (1987)).

2. Endlich-dimensionale bosonische und fermionische Hilbert-Räume

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum der Dimension d. Auf $\mathcal{H}^{(N)} = \otimes^N \mathcal{H}$ wirkt S_N auf natürliche Weise, wie in der Vorlesung behandelt. Berechne die Dimensionen des symmetrischen und des antisymmetrischen Unterraumes von $\mathcal{H}^{(N)} = \otimes^N \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{(N)} &= \{\psi \mid P_\sigma \psi = \psi, \, \sigma \in S_N\} \, , \\ \mathcal{H}_{\mathrm{a}}^{(N)} &= \{\psi \mid P_\sigma \psi = (\operatorname{sgn} \sigma)\psi, \, \sigma \in S_N\} \, . \end{aligned}$$

Hinweis: Verwende eine Basis für $\mathcal{H}$ und die damit verbundenen Besetzungszahlbasen für $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{(N)}$ bzw. $\mathcal{H}_{\mathrm{a}}^{(N)}$, wie in der Vorlesung. Im ersten Fall führt die Abzählung der Basisvektoren auf die selbe kombinatorische Frage wie in Aufgabe 2.1(i) der QM I.

3. Spin und Permutationssymmetrie

Unter den irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_N gibt es nur zwei, die 1-dimensional sind: Die symmetrische ($P_\sigma = 1$) und die antisymmetrische ($P_\sigma = \operatorname{sgn} \sigma$); vgl. (10.1). Ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, der eine unitäre Darstellung P_σ, ($\sigma \in S_N$) trägt, zerfällt in (möglicherweise z.T. triviale) invariante Unterräume, worin bis auf Wiederholungen nur je eine irreduzible Darstellung vorkommt. Jeder irreduziblen Darstellung entspricht so ein orthogonaler Projektor in $\mathcal{K}$.

i) Zeige: Die Projektoren $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}$ der beiden namentlich erwähnten irreduziblen Darstellung sind allgemein durch Gl. (10.10) gegeben.

ii) Für $N = 2$ gibt es keine weiteren irreduziblen Darstellung ausser den Beiden. Zeige dies durch $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathbb{1}$.

Ohne Beweis: Für $N = 3$ gibt es genau eine weitere, "gemischt symmetrische" irreduzible Darstellung. Sei $\mathcal{G}$ der entsprechende orthogonale Projektor. Drücke $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ durch die Operatoren P_σ aus.

Hinweis: $\mathcal{S} + \mathcal{A} + \mathcal{G} = \mathbb{1}$.

Sei nun $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ der Hilbertraum eines Spin $\frac{1}{2}$-Teilchens ($\hbar = 1$), und $\mathcal{K} = \otimes^N \mathcal{H}$ der von N Unterscheidbaren. Unter dem Spin versteht man eine darin vorkommende irreduzible Darstellung der SU(2); unter der Permutationssymmetrie eine der S_N. In den folgenden Beispielen soll gezeigt werden, dass sich die beiden entsprechen (Schur-Weyl-Dualität).

iii) Sei $N = 2$. Eigenwerte des Gesamtspins $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ sind $s(s+1)$ mit $s = 0, 1$ und Eigenprojektoren $P(s)$. Zeige die Entsprechung

$$P(1) = \mathcal{S}\ , \qquad P(0) = \mathcal{A} \tag{2}$$

und daraus

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = 1 + P_{(12)}\ . \tag{3}$$

Hinweis: Betrachte Singlett- ($s = 0$) und Triplettzustände ($s = 1$).

iv) Sei $N = 3$. Die Werte s des Gesamtspins $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ sind $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (wieso?). Man überlege sich, dass $\mathcal{A} = 0$ und $\mathcal{S}, \mathcal{G} \neq 0$. *Hinweis:* Verwende Aufgabe 2.

Zeige die Entsprechung in der Form

$$P(\tfrac{3}{2}) = \mathcal{S}\ , \qquad P(\tfrac{1}{2}) = \mathcal{G}\ .$$

Hinweis: Schreibe $\vec{S}^2$ einmal mit Hilfe von $(\vec{S}_{i+1} + \vec{S}_{i+2})^2$, $(i = 1, 2, 3)$ und (3), das andere mal als Spektralzerlegung nach den Projektoren $P(s)$.