Quantenmechanik II. Übung 8.

FS 14 *Abgabe:* Di 29. April 2014

1. Permutationssymmetrie von Bahn und Spin

Ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, der eine unitäre Darstellung P_σ ($\sigma \in S_N$) trägt, zerfällt in (möglicherweise z.T. triviale) invariante Unterräume, worin bis auf Wiederholungen nur je eine irreduzible Darstellung vorkommt. Jeder irreduziblen Darstellung entspricht so ein orthogonaler Projektor in $\mathcal{K}$. Beide sind im Folgenden mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Offensichtlich ist $\mathcal{F}\mathcal{F}' = 0$ für $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$.

Der 1-Teilchen-Hilbertraum sei von der Form

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_S \ ,$$

wobei die Zustände in $\mathcal{H}_{B/S}$ beispielsweise für die von Bahn und Spin stehen ($\mathcal{H}_B = L^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{H}_S = \mathcal{D}_j = \mathbb{C}^{2j+1}$), oder ebensogut für andere Eigenschaften (Grund- bzw. angeregter Zustand eines 2-Niveau-Systems, Isospin, Farbe, usw.).

Die natürliche Darstellung (10.3) der Permutationsgruppe auf dem Hilbertraum

$$\otimes^N \mathcal{H} = (\otimes^N \mathcal{H}_B) \otimes (\otimes^N \mathcal{H}_S)$$

ist verträglich mit dem Tensorprodukt: $P_\sigma = P_\sigma^{(B)} \otimes P_\sigma^{(S)}$. Relevant sind nur bosonische und fermionische Zustände aus $\otimes^N \mathcal{H}$, was sich aber nicht auf die Bahn- und Spinzustände übertragen lässt. Deren Permutationssymmetrien entsprechen sich wie im Folgenden dargelegt.

Bosonen: Der Zustandsraum ist $\mathcal{H}_S^{(N)} = \mathcal{S}(\otimes^N \mathcal{H})$. Allgemein gilt

$$\mathcal{S}(\otimes^N \mathcal{H}) \subset \bigoplus_{\mathcal{F}} (\mathcal{F}(\otimes^N \mathcal{H}_B) \otimes \mathcal{F}(\otimes^N \mathcal{H}_S)) \ , \tag{1}$$

d.h. alle symmetrischen Zustände ergeben sich bereits aus Bahn- bzw. Spinzuständen der N Teilchen, die eine gemeinsame Permutationssymmetrie $\mathcal{F}$ besitzen.

Fermionen: Der Zustandsraum ist $\mathcal{H}_A^{(N)} = \mathcal{A}(\otimes^N \mathcal{H})$. Desweiteren gibt es eine Zuordnung $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F}^T$ zwischen irreduziblen Darstellungen der S_N, so dass

$$\mathcal{A}(\otimes^N \mathcal{H}) \subset \bigoplus_{\mathcal{F}} (\mathcal{F}(\otimes^N \mathcal{H}_B) \otimes \mathcal{F}^T(\otimes^N \mathcal{H}_S)) \ . \tag{2}$$

Die Zuordnung ist:

$$\begin{aligned} N = 2: &\quad \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{S} \\ N = 3: &\quad \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{S},\ \mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{G} \end{aligned} \tag{3}$$

i) Bestätige (1-3) für $N = 2, 3$. Zeige dies dadurch, dass die "falschen" Tensorprodukte keine symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteile enthalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') &= 0 \ , \qquad (\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}) \ , \\ \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') &= 0 \ , \qquad (\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}^T) \ . \end{aligned}$$

Hinweis: Berechne $P_\sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')$, $(\sigma \in S_N)$ anhand der Ausdrücke (10.10) für $\mathcal{F} = \mathcal{A}, \mathcal{S}$.

ii) Betrachte ein 2-Niveaux-System mit Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen: $\mathcal{H}_B$ und $\mathcal{H}_S$ mit Basen $|g\rangle$, $|a\rangle$ bzw. $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$. Die Energien $\varepsilon_g < \varepsilon_a$ sind spin-unabhängig. Für $N = 2, 3$ stellt der fermionische Fall ein einfaches Modell des He- bzw. Li-Atoms dar. Illustriere (2, 3) anhand des Grundzustands:

$$\begin{aligned} N = 2: &\quad \mathcal{A}(|g\uparrow\rangle \otimes |g\downarrow\rangle) \\ N = 3: &\quad \mathcal{A}(|g\uparrow\rangle \otimes |g\downarrow\rangle \otimes |a\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

Hinweis: Für $N = 3$ sei

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle_B &= \frac{1}{2}(|agg\rangle - |gag\rangle) , \\ |\psi_2\rangle_B &= \frac{1}{6}(2|gga\rangle - |agg\rangle - |gag\rangle) \end{aligned} \tag{4}$$

und analog $|\psi_i\rangle_S$ aus $|g\rangle \to |\uparrow\rangle$, $|a\rangle \to |\downarrow\rangle$. Zeige $\mathcal{G}|\psi_i\rangle = |\psi_i\rangle$ und berechne $|\psi_1\rangle_B \otimes |\psi_2\rangle_S - |\psi_2\rangle_B \otimes |\psi_1\rangle_S$. Verwende die Resultate aus Aufgabe 7.3(i).

2. Ist die (Anti-)Symmetrisierung des Zustands stets erforderlich?

Grundsätzlich identische Teilchen können sich unterscheidbar machen durch eine Eigenschaft, die sie unwiderruflich annehmen. Was geschieht dann mit der Forderung der bosonischen bzw. fermionischen Statistik?

Der 1-Teilchen-Hilbertraum sei von der Form

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 ,$$

wobei $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ unter allen (im Anwendungsfall) relevanten Observablen A invariant sind, insbesondere unter dem Hamiltonoperator. Beispiele von Unterscheidungsmerkmalen: Spin nach oben/unten, Ort ist hier/dort, Nukleon ist Proton/Neutron.

Betrachte N_i Teilchen der Sorte $i = 1, 2$. Zeige: Es genügt, die Statistik für jede Sorte separat zu fordern.

i) Genauer, für Bosonen: Auf dem Unterraum

$$\mathcal{S}(\otimes^{N_1}\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{S}(\otimes^{N_2}\mathcal{H}_2) \subset \otimes^N \mathcal{H} , \qquad (N = N_1 + N_2) ,$$

der übrigens invariant ist unter $\sum_{k=1}^N A_k$, ist die Symmetrisierung

$$\lambda\mathcal{S} \colon \mathcal{S}(\otimes^{N_1}\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{S}(\otimes^{N_2}\mathcal{H}_2) \to \mathcal{S}(\otimes^N \mathcal{H})$$

für geeignetes λ eine Isometrie: $\|\lambda\mathcal{S}\psi\| = \|\psi\|$. Also: Zustände, die lediglich sortenweise symmetrisch sind, stehen in bijektivem Zusammenhang mit ihrer vollen Symmetrisierung. In diesem Sinne ist letztere überflüssig.

Hinweis: Berechne $\langle\lambda\mathcal{S}\psi|\lambda\mathcal{S}\psi\rangle$ und verwende $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}^* = \mathcal{S}$.

ii) Verfahre gleichermassen mit Fermionen.