Quantenmechanik II. Übung 12.

FS 11 *Abgabe:* Di 27. Mai 2014

1. Die Korrelationsfunktion des Fermi–Sees

Sei B ein 1-Teilchenoperator auf $\mathcal{H}$ und $d\Gamma(B)$ der entsprechende Operator auf dem fermionischen Fockraum $\mathcal{F}$ über $\mathcal{H}$, d.h.

$$d\Gamma(B) = \sum_{i=1}^{N} B^{(i)} \tag{1}$$

auf N-Teilchenzuständen. Seien $\Psi(\xi)$, ($\xi = (\vec{x}, s) \in \mathbb{R}^3 \times \{\pm 1\}$) die Vernichtungsoperatoren der Orts- und Spin-Basis $|\xi\rangle$ für $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$. Ausgehend von der Fockraum-Darstellung (14.22), bzw.

$$d\Gamma(B) = \int d\xi d\xi' \Psi^*(\xi) \langle \xi | B | \xi' \rangle \Psi(\xi') \tag{2}$$

ist im Skript der Erwartungswert von (1) im Zustand $|\Phi_0\rangle \in \mathcal{F}$ dargestellt als

$$\langle \Phi_0 | d\Gamma(B) | \Phi_0 \rangle = \int d\xi d\xi' \langle \xi | B | \xi' \rangle g(\xi, \xi') \tag{3}$$

mit der 1-Teilchen-Korrelationsfunktion

$$g(\xi, \xi') = \langle \Phi_0 | \Psi^*(\xi) \Psi(\xi') | \Phi_0 \rangle \ . \tag{4}$$

Betrachte freie Teilchen im Kasten (s. Skript S. 109) mit periodischen Randbedingungen und deren Grundzustand (Fermi-See):

$$|\Phi_0\rangle = \Big(\prod_{(\vec{k},s)} a^*_{\vec{k},s} \Big) |0\rangle \tag{5}$$

(mit Produkt über $|\vec{k}| \le k_F$, $\vec{k} \in (2\pi/L)\mathbb{Z}^3$, $s = \pm 1$) Zeige: Im Limes $L \to \infty$ gilt

$$g(\xi, \xi') = \begin{cases} 0 \ , & (s \neq s') \\ (2\pi)^{-3} \int_{|\vec{k}| \le k_F} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} d^3 k \ , & (s = s') \ . \end{cases} \tag{6}$$

Gehe wie folgt vor. Fasse den Fermi-See als Slater-Determinante

$$|\Phi_0\rangle = \sqrt{N!} \mathcal{A} \Big(\bigotimes_{(\vec{k},s)} |\varphi_{\vec{k},s}\rangle \Big)$$

von ebenen Wellen $\langle \vec{x}, s | \varphi_{\vec{k},s'} \rangle = L^{-3/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} \delta_{ss'}$ auf. Für solche gilt nach S. 120 oder Gl. (U11.2)

$$\langle \Phi_0 | d\Gamma(B) | \Phi_0 \rangle = \sum_{\alpha} \langle \varphi_\alpha | B | \varphi_\alpha \rangle \tag{7}$$

mit $\alpha = (\vec{k}, s)$. Das Ergebnis für endliches L ist

$$g(\xi, \xi') = L^{-3} \sum_{\substack{\vec{k},\sigma \\ |\vec{k}| \leq k_F}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \delta_{\sigma s} \delta_{\sigma s'} \ , \tag{8}$$

Berechne sodann das Integral (6) und stelle es graphisch als Funktion von $|\vec{x} - \vec{x}'|$ dar.

Die Lösung der Aufgabe wird als Ergänzung zum Skript erscheinen.