Klassisches Feld im Hohlraum $V \subset \mathbb{R}^3$, ideal leitende Wände:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

mit Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, $\varphi = 0$

<u>Randbedingung</u>:

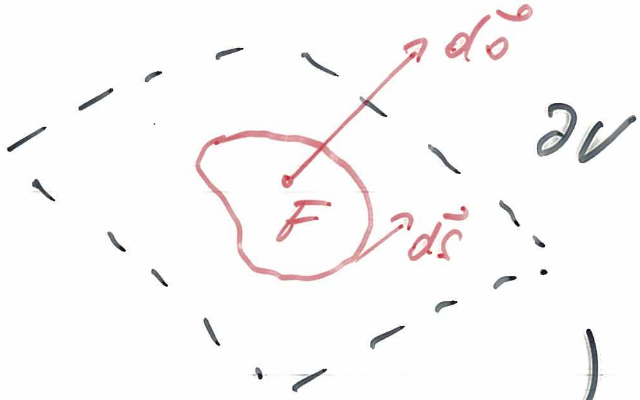
$$\vec{E}_{\parallel} = 0, \qquad \vec{B}_{\perp} = 0 \qquad (\text{auf } \partial V)$$

erfüllt durch

$$\vec{A}_{\parallel} = 0 \qquad (\text{auf } \partial V)$$

(denn für $F \subset \partial V$

$$\int_{\partial F} \vec{A}_{(\parallel)} \cdot d\vec{s} = \int_{F} \vec{B}_{(\perp)} \cdot d\vec{o}$$



also $\vec{A}_{\parallel} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{\perp} = 0$)

<u>Bewegungsgleichung</u>: Maxwell-Gl.

$$\Box \vec{A} \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \Delta \vec{A}\right) = 0$$

Klassische Feld im Hohlraum V

Eigenschwingungen

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}_\alpha(\vec{x})\, e^{\pm i\omega_\alpha t}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} -\Delta \vec{A}_\alpha &= \left(\frac{\omega_\alpha}{c}\right)^2 \vec{A}_\alpha \\ \operatorname{div} \vec{A}_\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ in } V$$

$$\vec{A}_{\alpha\parallel} = 0 \qquad \text{auf } \partial V$$

$-\Delta$ (mit Randbedingung) ist selbstadjungiert auf divergenzfreien Vektorfeldern mit Skalarprodukt

$$(\vec{A}_1, \vec{A}_2) = \int_V d^3x\, \vec{A}_1(\vec{x}) \cdot \vec{A}_2(\vec{x})$$

$$\rightarrow \quad (\vec{A}_\alpha, \vec{A}_\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

Normierung: $\quad (\vec{A}_\alpha, \vec{A}_\beta) = 4\pi c^2 \delta_{\alpha\beta}$

- Falls $\vec{A}_\alpha$ Eigenschwingung (zur Freq. ω_α), so auch $\bar{\vec{A}}_\alpha$

  → Eigenschw. können reell gewählt werden (müssen aber nicht)

<u>Bsp.</u> 1. Würfel V, $(0 \le x_i \le L,\ i=1,2,3)$ ideal leitende Wände.

Eigenschwingungen sind $\vec{A} = \vec{A}_\alpha$ mit

$$A_i(\vec{x}) = e_i \cdot \cos(k_i x_i) \sin(k_{i+1} x_{i+1}) \sin(k_{i+2} x_{i+2})$$

wobei

$$k_i = \frac{\pi}{L} \nu_i \qquad (\nu_i \text{ ganz}, \geq 0, \text{ höchstens eines} = 0)$$

$$\sum_i e_i k_i \equiv \vec{e} \cdot \vec{k} = 0 ,$$

also $\alpha = (\vec{k}, \vec{e})$ (reelle ES)

<u>Bsp.</u> 2. Würfel mit periodischen Rd. Bdg.

Eigenschwingungen

$$\vec{A}_\alpha(\vec{x}) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\, \vec{e}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

wobei $k_i = \frac{2\pi}{L} \nu_i$ (ν_i ganz), $\vec{e} \cdot \vec{k} = 0$

(komplexe ES)

Beispiel: Kasten mit periodischen Randbedingungen:

$s = (\vec{k}, \vec{e})$ mit $\vec{k}$ quantisiert
$\vec{k} \perp \vec{e}$ $\quad$ $\vec{e}$: 2 mögliche Polarisationen

$$\vec{A}_s(\vec{x}) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\,\vec{e}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Zerlegung nach Eigenschwingungen

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_\alpha q_\alpha(t)\,\vec{A}_\alpha(\vec{x})$$

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c}\sum_\alpha p_\alpha(t)\,\vec{A}_\alpha(\vec{x})$$

Feldenergie

$$\frac{1}{8\pi}\int_V d^3x\,(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_\alpha (p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2)}_{=:\,H}$$

- Maxwell-Gl. $\equiv$ Kanonische Bewegungsgleichungen zu H
- E.m. Feld $\equiv$ ∞-viele unabhängige harmonische Oszillatoren.

- Modendichte:

$$N(\omega) = \#\{\text{Moden mit Frequenzen} \leq \omega\}$$

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega^2 \qquad (\omega \to \infty)$$

für beide Beispiele
(und überhaupt für jede Gestalt des Hohlraums)

Quantisierung

$$H = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha \, a_\alpha^* a_\alpha$$

mit Erzeugungs- und Vernichtungs operatoren

$$a_{\bar\alpha}^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} (\omega_\alpha q_\alpha + i p_\alpha)$$

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} (\omega_\alpha q_\alpha - i p_\alpha)$$

($\bar\alpha$ bei komplexen Eigenschw.)

- erfüllen $[a_\alpha, a_\beta] = 0 = [a_\alpha^*, a_\beta^*]$
  $[a_\alpha, a_\beta^*] = \delta_{\alpha\beta}$
- wirken auf Vakuum $|0\rangle$,

$$a_\alpha |0\rangle = 0$$

und auf die Zustände

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \, n_2! \ldots}} (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} \ldots |0\rangle$$

$(n_\alpha \in \mathbb{N}, \sum_\alpha n_\alpha < \infty)$

Die Anregungen jeder Mode α sind quantisiert.
Photonen, in Anzahl n_α

- $a_\alpha^* |n_1, n_2, \ldots n_\alpha \ldots \rangle = \sqrt{n_\alpha + 1}\, |n_1, n_2, \ldots n_\alpha + 1, \ldots \rangle$

$$a_\alpha |n_1, n_2 \ldots n_\alpha \ldots \rangle = \begin{cases} \sqrt{n_\alpha}\, |n_1, n_2 \ldots n_\alpha - 1, \ldots \rangle & (n_\alpha > 0), \\ 0 & (n_\alpha = 0) \end{cases}$$

$\rightarrow a_\alpha^* a_\alpha |n_1, n_2 \ldots \rangle = n_\alpha |n_1, n_2 \ldots \rangle$

- Feldoperator

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}}\, (a_\alpha + a_\alpha^*)\, \vec{A}_\alpha(\vec{x})$$

Atom im Strahlungsfeld (Dipolnäherung)

Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_{strah}$

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = H_{at.} + H_{strah} \qquad \text{(ungekoppelt)}$$

$$H_1 = -\frac{1}{c}\vec{A}(0)\frac{i}{\hbar}[H_{at}, \vec{D}]$$

(Kopplung, zeitunabh.)

Feldoperator

$$\vec{A}(0) = \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}}\left(a_\alpha \vec{A}_\alpha(0) + a_\alpha^* \overline{\vec{A}_\alpha(0)}\right)$$

Atom (bei $\vec{x}=0$) im quantisierten Strahlungsfeld in Dipolnäherung

$$H = H_0 + H_1 \quad \text{auf } \mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_{str}$$

$$H_0 = H_{at} + H_{str} \qquad \text{(ungestört)}$$

$$H_1 = -\frac{1}{c}\vec{A}(0)\cdot\frac{i}{\hbar}[H_{at}, \vec{D}] \qquad \text{(Kopplung)}$$

- Zustände von H_{at} : $H_{at}|\varphi_i\rangle = \varepsilon_i|\varphi_i\rangle$ $(i = 0, 1)$
- Übergänge zwischen Eigenzuständen von H_0 : Von

$$|\psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |n_1, n_2, \dots\rangle$$

nach

$$|\psi_1\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |n_1', n_2', \dots\rangle$$

Energien $H_0|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle$

$$E_0 = \varepsilon_0 + \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha$$

$$E_1 = \varepsilon_1 + \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha'$$

- V gross : E_1 liegt im Quasi-Kontinuum von Eigenwerten

Anfangszustand in $\mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_{Strahlung}$

$$|\Psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |n_1, n_2, \ldots\rangle$$

mit • $H_{at} |\varphi_0\rangle = \varepsilon_0 |\varphi_0\rangle$,

• Strahlung polarisiert in Rtg. $\vec{e}$:

$n_\beta = 0$ für $\beta = (\vec{k}, \vec{e}\,')$ mit $\vec{e}\,' \neq \vec{e}$

und mit spektraler Dichte $u(\omega)$

$$\hbar\omega_\beta n_\beta \frac{1}{V} \frac{dN}{d\omega} = u(\omega) \quad (V \text{ groß})$$

$\omega_\beta \in [\omega, \omega + \Delta\omega]$

$\Delta N = \#\{\text{Moden } (\vec{k}, \vec{e}) \text{ mit Freq. in } \Delta\omega\}$

Energie von $|\Psi_0\rangle$

$$H_0 |\Psi_0\rangle = E_0 |\Psi_0\rangle$$

$$E_0 = \varepsilon_0 + \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha$$

Nachtrag: Bei unpolarisierter, von allen Richtungen einfallender Strahlung ist

$$\Gamma = u(\omega_{10}) \cdot \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \frac{1}{3} |\langle \psi_1 | \vec{D} | \psi_0 \rangle|^2$$

wobei $|\vec{d}|^2 = \vec{d}^* \cdot \vec{d}$.

Denn: Fortpflanzungsrtg $\vec{e}_0$
Polarisationen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ } $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ Dreibein

$$\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int de_0}_{\text{Mittelung über } \vec{e}_0} \quad \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} |\vec{d} \cdot \vec{e}_i|^2}_{\text{Mittelung über Polarisationen}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int de_0 \, \frac{1}{2} \left(|\vec{d}|^2 - |\vec{d} \cdot \vec{e}_0|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int de_0 \, \frac{1}{2} \left(|\vec{d}|^2 - \frac{1}{3} |\vec{d}|^2 \right) = \frac{1}{3} |\vec{d}|^2$$

Äusseres, klassisches elektromagnetisches Feld der Polarisation $\vec{e}$ mit spektraler Energiedichte $u(\omega)$ bewirkt atomare Übergänge $0 \to 1$ mit Rate

$$\Gamma_{1\leftarrow 0} = u(\omega_{10}) \cdot \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2$$

(Absorption)

$$\Gamma_{1\leftarrow 0} = u(\omega_{01}) \cdot \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2$$

(Emission)

Atom im quantisierten Strahlungsfeld:

Übergänge $0 \to 1$ mit Raten:

- Absorption

$$\Gamma_{1 \leftarrow 0} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2}\, u(\omega_{10})\, \frac{1}{3} |\langle \varphi_1 | \vec{D} | \varphi_0 \rangle|^2$$

- Emission

$$\Gamma_{1 \leftarrow 0} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \Big(u(\omega_{01}) + \underbrace{\frac{\hbar \omega_{01}^3}{\pi^2 c^3}}_{\text{spontane Emission}} \Big) \cdot \frac{1}{3} |\langle \varphi_1 | \vec{D} | \varphi_0 \rangle|^2$$

Zum Vergleich (Einstein): A, B-Koeffizienten

- Absorption

$$\Gamma_{1 \leftarrow 0} = B_{01}\, u(\omega_{10})$$

- Emission

$$\Gamma_{0 \leftarrow 1} = B_{10}\, u(\omega_{10}) + A_{10}$$

mit $B_{01} = B_{10}$, $\dfrac{A_{10}}{B_{10}} = \dfrac{\hbar \omega_{10}^3}{\pi^2 c^3}$ ✓!