Identische Teilchen : 1, 2, .. N

- keine Observable kann Teilchen i von j unterscheiden

$$\rightarrow \quad [A, P_\sigma] = 0 \qquad (\sigma \in S_N)$$

- $\rightarrow |\psi\rangle$ und $P_\sigma |\psi\rangle$ sind ununterscheidbare Zustände, da keine Observable sie unterscheiden kann.

- Postulat: Also soll

$$P_\sigma |\psi\rangle = \chi(\sigma) |\psi\rangle$$

für eine Phase $\chi(\sigma)$ $\quad (|\chi(\sigma)| = 1)$

- Es folgt:

$$\chi(\sigma) \equiv 1 \qquad \text{oder} \qquad \chi(\sigma) \equiv \operatorname{sgn} \sigma$$

1-dimensionale Darstellungen der S_N

Sei $\chi : S_N \to \mathbb{C}$, $\chi(\tau\sigma) = \chi(\tau)\chi(\sigma)$

mit $\chi \not\equiv 0$. Dann ist entweder

$$\chi(\sigma) \equiv 1$$

oder

$$\chi(\sigma) \equiv \operatorname{sgn} \sigma$$

$\mathcal{H}$: 1-Teilchen-Hilbertraum

(Bsp: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2j+1}$: Spin j Teilchen
$\psi = \psi(\xi)$, $\xi = (\vec{x}, \ldots$

Auf

$$\otimes^N \mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{N \text{ Faktoren}}$$

wirkt die Permutationsgruppe $S_N \ni \sigma$:
Darstellung

$$P_\sigma : \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N \longmapsto \psi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma^{-1}(N)}$$

(Bsp:
$(P_\sigma \psi)(\xi_1, \ldots \xi_N) = \psi(\xi_{\sigma(1)}, \ldots \xi_{\sigma(N)})$)

Unterräume von $\otimes^N \mathcal{H}$:

- Hilbertraum von N Bosonen
  $\mathcal{H}_s^{(N)} = \{\psi \mid P_\sigma \psi = \psi\}$ $\forall \sigma \in S_N$
  (symmetrische Zustände)
- Hilbertraum von N Fermionen
  $\mathcal{H}_a^{(N)} = \{\psi \mid P_\sigma \psi = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \psi\}$
  (antisymmetrische Zustände)

- Entsprechende Unterräume von $\bigotimes^N \mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_S^{(N)} = \{ \psi \mid P_\sigma |\psi\rangle = |\psi\rangle, \sigma \in S_N \}$$

(symmetrische Zustände)

$$\mathcal{H}_a^{(N)} = \{ \psi \mid P_\sigma |\psi\rangle = (\operatorname{sgn} \sigma) |\psi\rangle, \sigma \in S_N \}$$

(antisymmetrische Zustände)

Spin-Statistik-Zusammenhang

Teilchen mit Spin $j \in \{0, 1, \dots\}$: Bosonen

" " " $j \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$: Fermionen

---

Projektoren $\otimes^N \mathcal{H} \to \otimes^N \mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_s^{(N)}$, $\mathcal{H}_a^{(N)}$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} P_\sigma \quad , \quad \mathcal{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} (\operatorname{sgn} \sigma) P_\sigma$$

erfüllen $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* = \mathcal{S}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^2$

Unabhängige Fermionen und Bosonen

- 1 Teilchen

Hilbertraum $\mathcal{H}$

Hamiltonoperator h

Eigenwertproblem von h:

$$h|\varphi_\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha |\varphi_\alpha\rangle \quad , \quad \langle\varphi_\alpha|\varphi_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

($\alpha = 0, 1, 2, ..$ Quantenzahlen;
$|\varphi_\alpha\rangle$ 1-Teilchenzustände)

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots$$

- N Teilchen ohne "Statistik"

Hilbertraum $\otimes^N \mathcal{H}$

Hamiltonoperator (unabh. Teilchen)

$$H = \sum_k^N h_k = \sum_{k=1}^N \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ter Faktor}}}{h} \otimes \cdots \mathbb{1}$$

Eigenwertproblem von H:

$$|\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}\rangle = |\varphi_{\alpha_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\varphi_{\alpha_N}\rangle$$

d.h. $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\xi_1, \dots \xi_N) = \varphi_{\alpha_1}(\xi_1) \cdots \varphi_{\alpha_N}(\xi_N)$

$$H|\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}\rangle = E_{\alpha_1 \dots \alpha_N} |\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}\rangle$$

mit

$$E_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \varepsilon_{\alpha_1} + \dots + \varepsilon_{\alpha_N}$$

• N <u>Fermionen</u>: Hilbertraum $\mathcal{H}_a^{(N)} \subset \bigotimes^N \mathcal{H}$

$$|\Psi_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_N\}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (\operatorname{sgn} \sigma) |\varphi_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \ldots \otimes \varphi_{\alpha_{\sigma^{-1}(N)}}\rangle$$

hängt (bis aufs Vorzeichen) nur von Menge $\{\alpha_1 \ldots \alpha_N\}$ ab (nicht von Reihenfolge)

$$\langle \Psi_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_N\}} | \Psi_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_N\}} \rangle = \begin{cases} 0 & (\alpha_i = \alpha_j \text{ für ein } i \neq j) \\ 1 & (\alpha_i \neq \alpha_j \text{ für alle } i \neq j) \end{cases}$$

• Besetzungszahlbasis

$$|n_0, n_1 \ldots\rangle = |\Psi_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_N\}}\rangle,$$

wobei $n_\alpha = \#\{j \,|\, \alpha_j = \alpha\}$ erfüllen

$$n_\alpha = 0 \text{ oder } 1, \quad \sum_\alpha n_\alpha = N.$$

• $H |n_0, n_1 \ldots\rangle = E |n_0, n_1 \ldots\rangle$

mit $E = \sum_\alpha n_\alpha \varepsilon_\alpha$

• Grundzustand: $n_0 = \ldots = n_{N-1} = 1$, $n_N = n_{N+1} = \ldots = 0$

$$E_0 = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varepsilon_\alpha \qquad (\varepsilon_{N-1}: \text{Fermi-Energie})$$

• N Bosonen: Hilbertraum $\mathcal{H}_S^{(N)} \subset \bigotimes^N \mathcal{H}$

$$|\Psi_{\{\alpha_1, \dots \alpha_N\}}\rangle \equiv |n_0, n_1, \dots\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \, n_0! \, n_1! \dots}} \sum_{\sigma \in S_N} |\varphi_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes \varphi_{\alpha_{\sigma^{-1}(N)}}\rangle$$

mit $n_\alpha = \#\{j \mid \alpha_j = \alpha\}$.

• $\langle \Psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_N\}} | \Psi_{\{\alpha_1, \dots \alpha_N\}} \rangle = 1$

• n_α erfüllen

$$n_\alpha \in \mathbb{N} \quad , \quad \sum_\alpha n_\alpha = N$$

• $H|n_0, n_1, \dots\rangle = E|n_0, n_1 \dots\rangle$ mit

$$E = \sum_\alpha n_\alpha \varepsilon_\alpha$$

• Grundzustand: $n_0 = N$, $n_1 = n_2 = \dots = 0$

$$E_0 = N \varepsilon_0$$

Grundzustand freier Fermionen im Gefäss (Spin $\frac{1}{2}$, N Teilchen, Volumen V)

- Dichte $n = \frac{N}{V}$

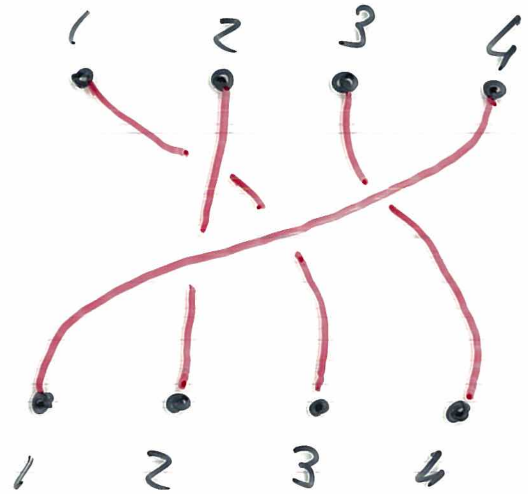
- Energie E_0

$$\frac{E_0}{V} = \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{(3\pi^2)^{2/3}}_{=:\gamma} \cdot \frac{3}{5} n^{5/3}$$

- Zustand: Alle 1-Teilchenzustände mit $|\vec{k}| \leq k_F$ besetzt:

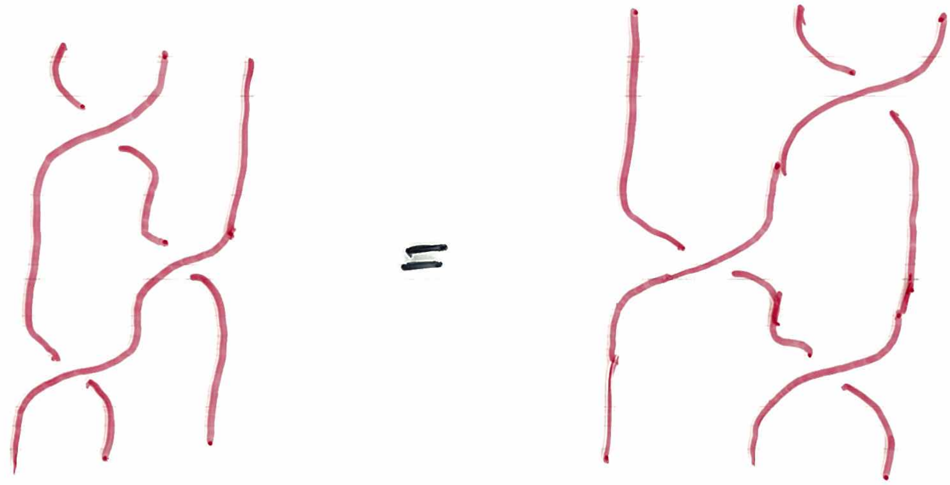
$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = \gamma^{1/2} n^{1/3}$$

Zopf b aus N Strängen. Bsp: N=4



Regeln:

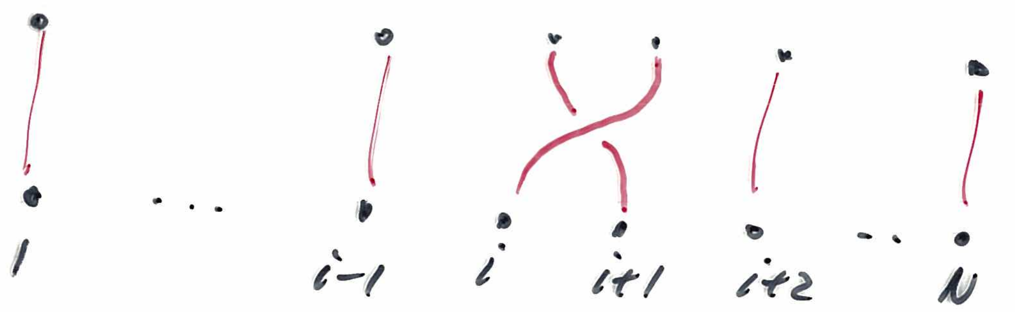
- Ein Strang pro $n = 1, .. N$ (unten und oben
- Stränge nur nach oben
- Deformationen erzeugen keine neuen Zöpfe



Eigenschaften:

- Zöpfe bilden Gruppe B_N (Zopfgruppe,
  Produkt $b_1 b_2$: b_1 liegt über b_2
  Neutralel. id : gerade Stränge
  inverses El. b^{-1} : Spiegelung von b
  an Horizontale

- Elementare Zöpfe $b_i = [i\ i{+}1]$ $(i=1,..N-1)$



erzeugen B_N.

- 1-dim. Darstellungen der B_N:
  Sei $\chi : B_N \to U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit
  $\chi(b'b'') = \chi(b')\chi(b'')$. Dann gibt es
  $\alpha \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$ so, dass

$$\chi(b) = e^{i\alpha} \qquad (*)$$

für alle elementaren Zöpfe b.

Umgekehrt ist durch $(*)$ eine Darstellung definiert.

M (topologischer) Raum

$x_0 \in M$ ausgezeichneter Punkt

- Schleife in x_0: Stetiger Pfad von x_0 nach x_0

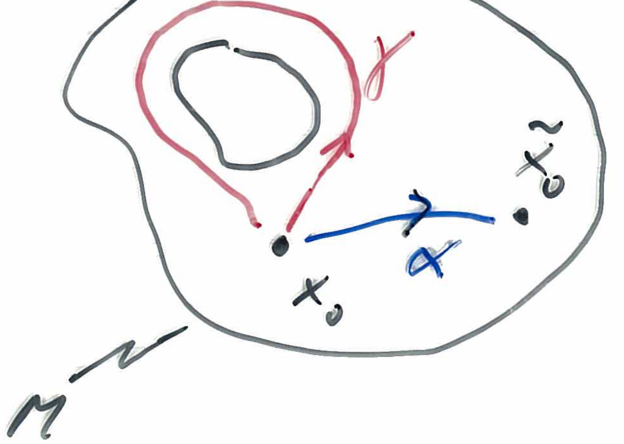
Deformationen (in M) erzeugen keine neue Schleifen

- $\pi_1(M, x_0) = \{\gamma \mid \gamma \text{ Schleife in } x_0\}$

  ist <u>Gruppe</u> (Produkt = Zusammensetzung)

- Falls M zusammenhängend,

$$\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(M, \tilde{x}_0) \equiv \pi_1(M)$$



$\alpha \gamma \alpha^{-1}$ ist Schleife in $\tilde{x}_0$

- $\pi_1(M)$ heisst (erste) <u>Homotopiegruppe</u>

$\pi_1(M)$ trivial $\Longleftrightarrow$ M einfach zusammenhängend

$x \in M_0$: Konfiguration von
N nicht koinzidenten Teilchen

$X \subset \mathbb{R}^d$: Teilmenge aus N
Elementen (ohne
Wiederholungen)

Hilbertraum N identischer Teilchen
trägt Darstellung

$$|\psi\rangle \longmapsto \chi(\gamma)|\psi\rangle$$

mit

$$\chi : \pi_1(M_0) \to U(1), \quad \gamma \longmapsto \chi(\gamma)$$

Es gilt:

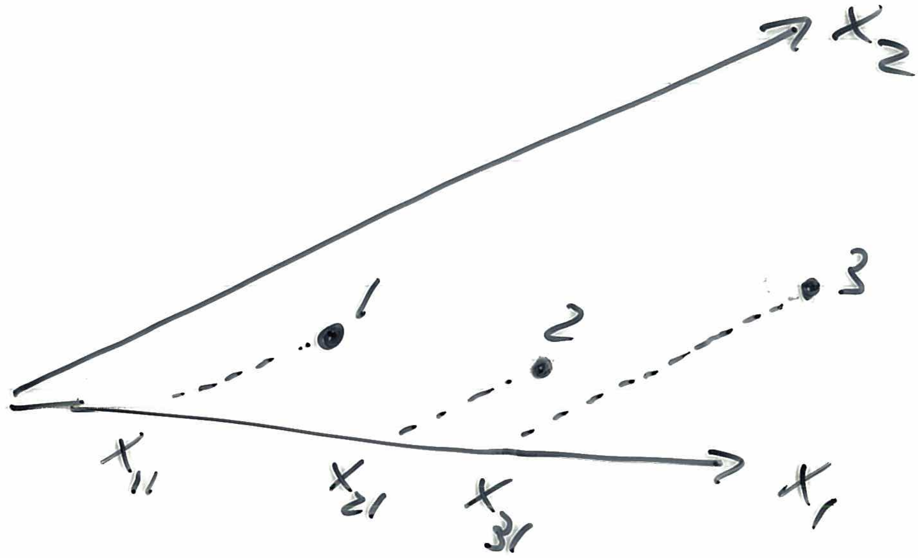
$$\pi_1(M_0) \cong B_N \qquad (d=2)$$

$$\pi_1(M_0) \cong S_N \qquad (d \geq 3)$$

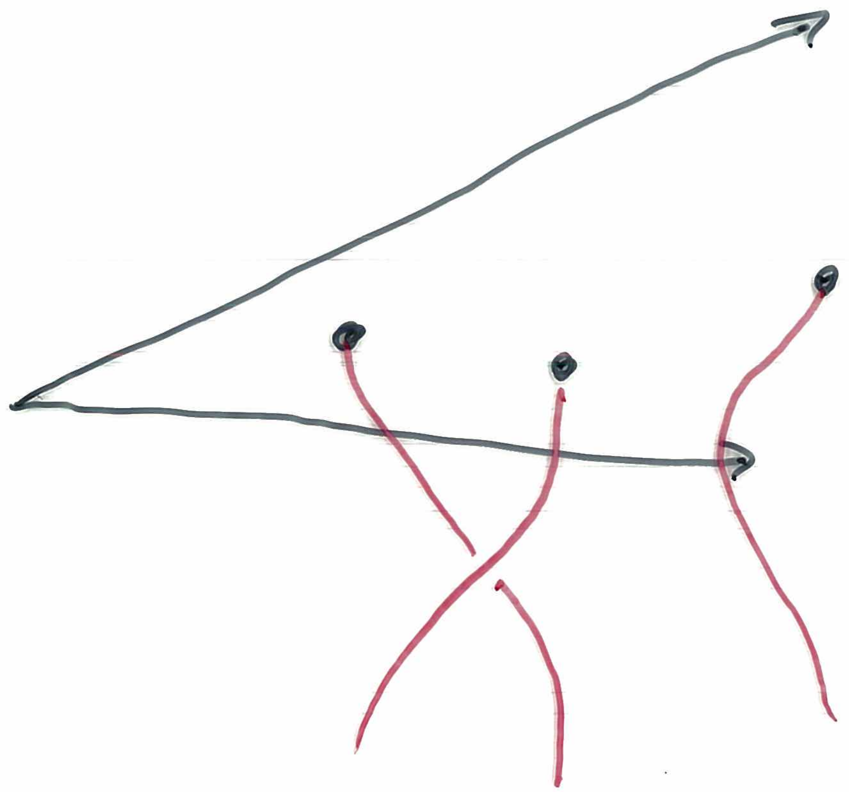
Bemerkung

$$\pi_1(M_0) \longrightarrow S_N, \quad \gamma \mapsto \sigma$$

(natürlich definiert) ist (surjektiver)
Homomorphismus



x_2
1
2
3
x_{11}
x_{21}
x_{31}
x_1



γ

Projektion auf 1-Achse längs 2-Rtg

$$\gamma \longmapsto b$$

(Schleife) (Zopf)

ist injektiver (und surjektiver) Homomorphismus

$$\pi_1(M_0) \longrightarrow B_N$$