**Fock-Raum** : Hilbertraum für Zustände beliebiger, endlicher Teilchenzahl

$\mathcal{H}$ : 1-Teilchen-Raum

$$\mathcal{H}^{(n)}_{s/a} = \left\{ \psi \in \otimes^n \mathcal{H} \,/\, P_\sigma \psi = \left\{ {1 \atop \mathrm{sgn}\,\sigma} \right\} \psi \right\}$$

für $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Bosonen} & (s) \\ \text{Fermionen} & (a) \end{array} \right.$

$$\left( \mathcal{H}^{(0)}_{s/a} = \mathbb{C} , \ \mathcal{H}^{(1)}_{s/a} = \mathcal{H} \right)$$

$\mathcal{H}^{(n)}_{s/a}$ : $n$-Teilchen-Raum

**Fock-Raum:**

$$\mathcal{F}_{s/a} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}_{s/a}$$

Zustand $\Psi \in \mathcal{F}$ ist Folge

$$|\Psi\rangle = \{ \psi^0, \psi^1, \psi^2, \dots \} \quad \text{mit } \psi^n \in \mathcal{H}^{(n)}_{s/a}$$

Wir identifizieren

$$|\psi^n\rangle \equiv \{0, 0, \ldots 0, \psi^n, 0, \ldots\}$$

$\uparrow$ n-ter Eintrag

<u>Vakuum</u>:

$$|0\rangle = \{1, 0, 0, \ldots\}$$

<u>Vernichtungsoperator</u>

(Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, $|\psi\rangle \leftrightarrow \psi(\xi)$, $\xi = (\vec{x}, s)$)

Für $|f\rangle \in \mathcal{H}$ sei

$$a(f) : \mathcal{F}_{sym} \to \mathcal{F}_{sym}, \quad \Psi \mapsto a(f)\Psi$$

definiert durch

$$(a(f)\Psi)^{n-1}(\xi_2, \ldots \xi_n)$$
$$:= \sqrt{n} \int d\xi_1 \overline{f(\xi_1)}\, \psi^n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n).$$

Insbesondere:

- $a(f) : \mathcal{H}_{sym}^{(n)} \to \mathcal{H}_{sym}^{(n-1)}$, $(n \geq 1)$
- $a(f)|0\rangle = 0$

Erzeugungsoperator $a^*(f) := (a(f))^*$

$$(a^*(f)\psi)^n(\xi_1, \dots \xi_n) \qquad (n \geq 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (\pm 1)^{k-1} f(\xi_k)\, \psi^{n-1}(\xi_1, \dots \hat{\xi}_k, \dots \xi_n)$$

Auslassung

$$(a^*(f)\psi)^0 = 0$$

Insbesondere: $a^*(f) : \mathcal{H}_{s/a}^{(n)} \to \mathcal{H}_{s/a}^{(n+1)}$

Kommutator / Antikommutator

$$[A,B]_{\mp} = AB \mp BA \quad \begin{cases} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{cases}$$

Vertauschungsrelationen

$$[a(f), a(g)]_{\mp} = 0 \quad , \quad [a^*(f), a^*(g)]_{\mp} = 0$$

$$[a(f), a^*(g)]_{\mp} = \langle f, g \rangle$$

($|f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{H}$ 1-Teilchenzustände)

---

ONBasis $|f_i\rangle$ für $\mathcal{H}$. Setze

$$a_i = a(f_i)$$

Basiswechsel: $|f_i\rangle \to |\tilde{f}_i\rangle$

$$\tilde{a}_i = \sum_j a_j \langle \tilde{f}_i | f_j \rangle$$

$$\tilde{a}_i^* = \sum_j a_j^* \langle f_j | \tilde{f}_i \rangle$$

# Observablen in der Fock-Darstellung

- 1-Teilchenoperator $b$

$$d\Gamma(b) = \sum_{i=1}^{n} b^{(i)}$$

auf $n$-Teilchenzuständen ($b^{(i)}$ ist $b$ auf $i$-tes Teilchen wirkend). Dann

$$d\Gamma(b) = \sum_{kl} a_k^* b_{kl} a_l$$

($k, l$ indizieren Vektoren der 1-Teilchenbasis)
mit

$$b_{kl} = \langle f_k | b | f_l \rangle$$

- 2-Teilchenoperator $b$

$$d\Gamma(b) = \sum_{i<j} b^{(ij)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} b^{(ij)} \text{ auf } \mathcal{H}^{(n)}$$

Dann

$$d\Gamma(b) = \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2 l_1 l_2} a_{k_2}^* a_{k_1}^* b_{k_1 k_2 l_1 l_2} a_{l_1} a_{l_2}$$

mit

$$b_{k_1 k_2 l_1 l_2} = \langle f_{k_1} \otimes f_{k_2} | b | f_{l_1} \otimes f_{l_2} \rangle$$

Observablen in der Fock-Darstellung (Fort.)

- 1-Teilchenoperator $b$ auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

Erwartungswerte ($|\psi\rangle \in \mathcal{H}$)

$$\langle\psi|b|\psi\rangle = \int d^3x\, d^3x' \langle\psi|\vec{x}\rangle \underbrace{\langle\vec{x}|b|\vec{x}'\rangle} \langle\vec{x}'|\psi\rangle$$

$$= \int d^3x\, d^3x'\, \overline{\psi(\vec{x})}\, b(\vec{x},\vec{x}')\, \psi(\vec{x}')$$

Zum Vergleich:

$$d\Gamma(b) = \int d^3x\, d^3x'\, \Psi^*(\vec{x})\, b(\vec{x},\vec{x}')\, \Psi(\vec{x}')$$

"Rezept" der 2. ten Quantisierung:
$b \rightsquigarrow d\Gamma(b)$ erhält man durch

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wellenfunktion}}}{\psi(\vec{x})} \longrightarrow \underset{\text{Feldoperator}}{\Psi(\vec{x})}$$

im Ausdruck für $\langle\psi|b|\psi\rangle$.

- 2-Teilchenoperator: analog, s. Beispiele

Beispiele (Abkürzung $\hat{\sigma} \equiv d\Gamma(\sigma)$)

1) Dichte in $\vec{x}_0$ : 1-T.op.

$$\rho(\vec{x}_0) = \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$\langle\psi|\rho(\vec{x}_0)|\psi\rangle = \int d^3x\, |\psi(\vec{x})|^2 \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$= |\psi(\vec{x}_0)|^2 = \overline{\psi(\vec{x}_0)}\psi(\vec{x}_0)$$

Also:

$$\hat{\rho}(\vec{x}_0) = \Phi^*(\vec{x}_0)\Phi(\vec{x}_0).$$

2) Kinetische Energie : 1-T. op

$$T = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

$$\langle\psi|T|\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int d^3x\, \overline{\psi(\vec{x})}(\Delta\psi)(\vec{x})$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\int d^3x\, \overline{\vec{\nabla}\psi(\vec{x})}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

Also:

$$\hat{T} = \frac{\hbar^2}{2m}\int d^3x\, \vec{\nabla}\Phi^*(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$$

3) Paarwechselwirkung : 2-T. op.

$W(\vec{x}-\vec{y})$

$$\langle \psi | W | \psi \rangle = \int d^3x \, d^3y \, \overline{\psi(\vec{x},\vec{y})} \, W(\vec{x}-\vec{y}) \, \psi(\vec{x},\vec{y})$$

Also

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\int d^3x \, d^3y \, \Phi^*(\vec{y}) \, \Phi^*(\vec{x}) \, W(\vec{x}-\vec{y}) \, \Phi(\vec{x}) \, \Phi(\vec{y})$$

Anwendung: Der Vielteilchen-Hamilton operator

$$H = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\vec{P}_i^2}{2m} + V(\vec{x}_i) \right) + \sum_{i<j}^{n} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

ist auch

$$H = \int d^3x \left( \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\Phi^*(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) + \Phi^*(\vec{x}) \, V(\vec{x}) \, \Phi(\vec{x}) \right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int d^3x \, d^3y \, \Phi^*(\vec{y}) \, \Phi^*(\vec{x}) \, W(\vec{x}-\vec{y}) \, \Phi(\vec{x}) \, \Phi(\vec{y})$$

Freie Teilchen im Quantisierungsvolumen $[0,L]^3$, $(V=L^3)$:

- 1-Teilchenzustände (Basis) $|\varphi_{\vec{k},s'}\rangle$

$$\langle \vec{x}, s | \varphi_{\vec{k},s'} \rangle = \delta_{ss'} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\left(\vec{k} \in \left(\frac{2\pi}{L}\right) \mathbb{Z}^3,\ s = \pm\right.$$

- Zweite Quantisierung

Basis $|\varphi_{\vec{k},s}\rangle \longrightarrow a_{\vec{k},s}$

Basis $|\xi\rangle = |\vec{x},s\rangle \longrightarrow \Psi(\xi)$

$$\Psi(\vec{x},s) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k},s}$$

"Feldoperator"