Übung 1. *Legendre-Transformation*

Die Legendre-Transformation einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$f^*(p) := \mathcal{L}f(p) = \sup_x [xp - f(x)].$$

In dieser Aufgabe werden wir zeigen, dass die Legendre-Transformation für strikt konvexe Funktionen involutiv ist, d.h. $f^{**} := (f^*)^* = f$. Eine Funktion f heisst *konvex*, falls sie für alle x_1, x_2 in seiner Definitionsmenge folgende Ungleichung erfüllt,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0,1],$$

und *strikt konvex*, wenn Gleichheit nur für $\lambda = 0, 1$ oder $x_1 = x_2$ gilt.

a) Wie ist die Legendre-Transformation geometrisch zu verstehen? Wie lässt sich die ursprüngliche Funktion $f(x)$ aus der Legendre-Transformierten $f^*(p)$ geometrisch rekonstruieren?

b) Zeige, dass die Legendre-Transformierte $f^*(p)$ einer beliebigen Funktion f konvex ist.

c) Falls $f(x)$ stetig differenzierbar und strikt konvex ist, zeige, dass

$$f^*(p) = \tilde{x}p - f(\tilde{x}),$$

wobei $\tilde{x}$ über die Gleichung $p = f'(\tilde{x})$ festgelegt wird.

d) Falls $f(x)$ stetig differenzierbar und strikt konvex ist, zeige, dass $f^*(p)$ strikt konvex ist.

e) Falls $f(x)$ stetig differenzierbar und strikt konvex ist, zeige, dass

$$f^{**}(x) = f(x).$$

Wende dazu die Legendre-Transformation auf $f^*(p)$ an.

f) Berechne die Legendre-Transformierte $f^*(p)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \leq 1 \\ x - 1/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 7/2 & 2 \leq x \end{cases}.$$

Beachte, dass diese Funktion konvex aber nicht strikt konvex ist.

g) Berechne die Legendre-Transformierte $f^*(p)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 5/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 7/2 & 2 \leq x \end{cases},$$

die nicht konvex ist. Wie sieht die rücktransformierte Funktion $f^{**}(x)$ aus? Wie steht sie in Relation zu f?

Übung 2. *Die thermodynamischen Potentiale des idealen Gases*

Berechne die Energie $U(S,V)$, die freie Energie $F(T,V)$ und die Gibbs'sche freie Energie $G(T,p)$ für ein Mol eines idealen Gases mit (konstanter) spezifischer Wärme c_V. Zeige, relativ zu welchen Parametern diese Funktionen konvex bzw. konkav sind.

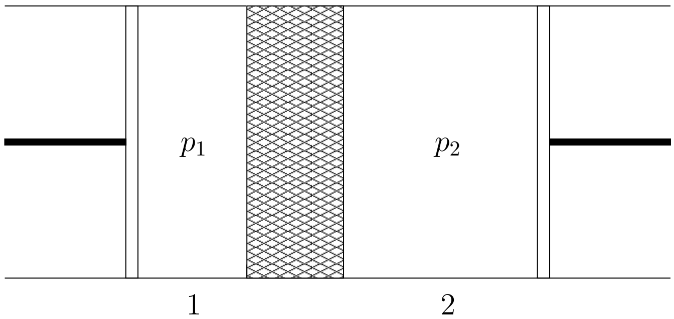
Hinweis. Ein möglicher Ausgangspunkt ist die Entropie $S(U,V)$, gegeben durch

$$S - S_0 = c_V \log \frac{U}{U_0} + R \log \frac{V}{V_0} \,, \tag{1}$$

mit der Wahl $U_0 = c_V T_0$ der Energie im Referenzzustand (T_0, V_0).

Übung 3. *Joule-Thomson Effekt*

Ein (im Allgemeinen nicht ideales) Gas strömt adiabatisch (und irreversibel) durch eine poröse Wand von 1 nach 2, wobei die Drücke p_1 und p_2 konstant gehalten werden.



(a) Zeige, dass die Enthalpie $H = U + pV$ konstant bleibt.

(b) Je nach Vorzeichen von $(\partial T/\partial p)_H$ erfährt das Gas beim Durchströmen eine Erwärmung oder eine Abkühlung (Joule-Thomson Effekt). Die Kurve, die die beiden Gebiete im p-T Diagramm trennt, heisst Inversionskurve. Zeige, dass sie der Gleichung

$$T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V = 0$$

genügt. Abkühlung findet statt, falls der Ausdruck positiv ist.

Hinweis. Berechne $(\partial T/\partial p)_H$ mit Hilfe von Aufgabe 2 von Serie 1.

(c) Zeige, dass der Effekt bei einem idealen Gas nicht vorhanden ist.

Bemerkung: Die Joule-Thomson Expansion ist einer der Schritte im Zyklus üblicher Kühlschränke.