Übung 1. *Entropie*

Mit einem kleinen Ausflug in die statistische Mechanik wollen wir in dieser Aufgabe etwas über die Entropie lernen.

Wir betrachten als Modell einen quadratischen zweidimensionalen Raum. Dieser solle in $L \times L = K$ Kästchen eingeteilt werden. In jedem dieser Kästchen befinden sich n_i Teilchen, bei einer Gesamtteilchenzahl $N = \sum_{i=1}^{K} n_i$.

a) Welche Verteilung $\{n_i\}$ entspricht einer minimalen, welche einer maximalen "Unordnung", d.h. einem maximalen bzw. minimalen Informationsgehalt im System?

b) Zeige, dass für eine gegebene Verteilung $\{n_i\}$ die Entropie des Systems gegeben ist durch

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{K} n_i \log\left(\frac{n_i}{N}\right). \tag{1}$$

Hinweis: Die Entropie ist definiert als $S = k_B \log(\text{Anzahl mögliche Zustände})$. Wieviele Zustände mit fixen $\{n_i\}$ gibt es?

c) Finde die Verteilung $\{n_i\}$ mit der maximalen Entropie aus Gl. (1) bei konstanter Gesamtteilchenzahl N (und die Entropie in diesem Zustand). Was schliesst du daraus?

d) Wir wollen nun das Modell um eine Dynamik erweitern, und zwar auf folgende Weise (Baker-Transformation): Stauche den Raum in x-Richtung und strecke ihn in y-Richtung jeweils um den Faktor 2. Das System hat nun die Abmessungen $(L/2) \times (2L)$. Schneide nun die rechte Hälfte des Systems (rechts von $y = L$) ab und füge sie wieder oben an das System an. Man hat nun wieder ein Quadrat mit Seitenlänge L, jedoch mit um Faktor 2 gestauchten resp. gestreckten Zellen. Gehe nun wieder zur ursprünglichen Form des Systems über indem du den Teilcheninhalt der deformierten Kästchen gleichmässig auf die ursprünglichen Kästchen verteilst (vgl. Abb. 1). Implementiere diese Dynamik auf dem Computer und berechne die Entropie nach jedem Schritt. Starte dabei mit einer Verteilung $n_1 = 1$ und $n_i = 0$ sonst (die n_i sind jetzt eigentlich n_i/N, wobei wir annehmen, dass N gross ist und n_i deshalb kontinuierlich). Wie verändert sich die Entropie? Erreicht sie einen Sättigungswert und falls ja, welchen?

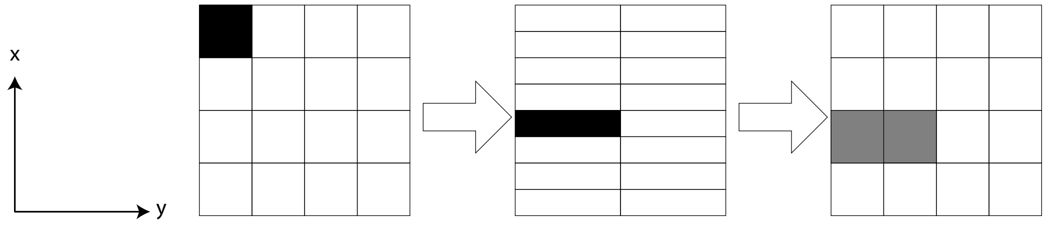

Abbildung 1: Ilustration des ersten Schrittes der Dynamik mittels Baker-Transformation.

Übung 2. ***Zur Maxwell-Boltzmann Verteilung***

Die Maxwell-Boltzmann Verteilung eines Gases lautet in Abwesenheit äusserer Kräfte

$$f(\vec{v}) = \mathcal{N} \mathrm{e}^{-\beta m \frac{\vec{v}^2}{2}} \ ,$$

($\mathcal{N}$, β: Parameter). In der Vorlesung wurde Boltzmanns Herleitung gezeigt. Hier soll Maxwells Zugang gefolgt werden. Seine Annahmen über die Gleichgewichtsverteilung f sind:

i) Die Verteilung $f(\vec{v})$ ist rotationsinvariant.

ii) Die Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten v_i, $(i = 1, 2, 3)$, sind unabhängig.

Leite die Maxwell-Boltzmann Verteilung unter diesen Annahmen her.

Hinweis: (i): $f(\vec{v}) = F(\vec{v}^2)$; (ii) $f(\vec{v}) = g_1(v_1) g_2(v_2) g_3(v_3)$.

Übung 3. ***Zum dritten Hauptsatz***

Zeige, dass die thermische Zustandsgleichung

$$M(T, H) = \frac{K}{T} H \ , \qquad (K = \text{const.})$$

(Curie-Gesetz) dem dritten Hauptsatz widerspricht.