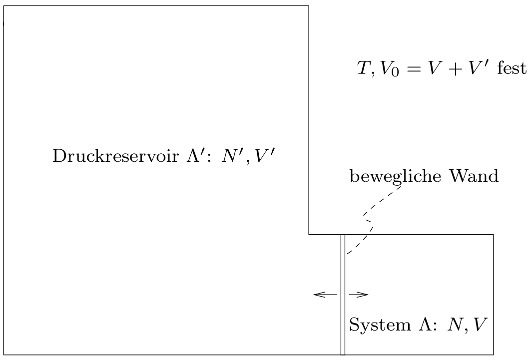
Übung 1. *Isotherm-isobare Gesamtheit*

$$F(\beta, V, N) = -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta, V, N) \tag{1}$$

Die freie Energie $F(\beta, V, N)$ ist allgemein durch (1) gegeben, wobei $Z(\beta, V, N)$ die kanonische Zustandssumme ist. Finde die "isotherm-isobare Zustandssumme" $\tilde{Z}(\beta, p, N)$, die in analoger Weise die Gibbs'sche freie Energie $G(\beta, p, N)$ liefert:

$$G(\beta, p, N) = -kT \log \tilde{Z}(\beta, p, N) \; .$$



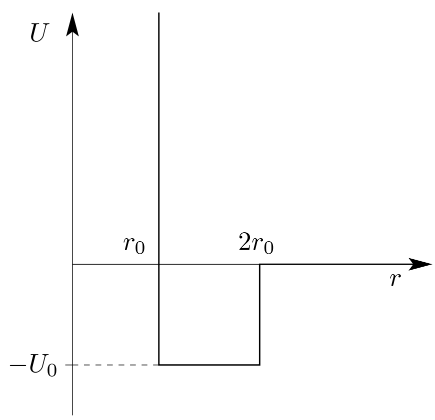
Hinweis. *Kopple das System an ein Druckreservoir. System und Reservoir zusammen haben feste Volumen und Temperatur, werden also im Gleichgewicht durch die kanonische Gesamtheit beschrieben. Verfahre in analoger Weise wie bei der Herleitung der kanonischen aus der mikrokanonischen Gesamtheit.*

Übung 2. *Takahashi-Gas*

Betrachte ein Gas von N Teilchen in einer Dimension mit Hamilton-Funktion $H_N = T_N + U_N$:

$$\begin{aligned} T_N &= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}, \\ U_N &= \sum_{1 \le i < j \le N} U\left(|x_i - x_j|\right), \\ U(r) &= \begin{cases} \infty & r < r_0 \\ -U_0 & r_0 < r < 2r_0 \\ 0 & r > 2r_0 \end{cases} , \end{aligned}$$

mit U_0 positiv und r_0 der "Radius" der Gasteilchen.



Berechne die isotherm-isobare Zustandssumme, vgl. Exercise 1. Bestimme das mittlere Volumen pro Teilchen und diskutiere die Grenzfälle $\beta p r_0 \to 0, \infty$ bzw. $\beta U_0 \to 0, \infty$, wobei p den Druck bezeichnet.

Hinweis. *In der isothermen (kanonischen) Zustandssumme ist über den Konfigurationsraum* $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_N \leq L$ *zu integrieren. Man substituiere die Orte* x_i *durch die Abstände zwischen den Teilchen und zu den Wänden*

$$\begin{aligned} y_i &= x_{i+1} - x_i, \quad (i = 1, \cdots, N-1), \\ y_0 &= x_1, \qquad y_N = L - x_N. \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung $\sum_{i=0}^{N} y_i = L$ *entfällt beim Übergang zur isotherm-isobaren Gesamtheit.*

Übung 3. *Klassische statistische Mechanik und Bohr-van Leeuwen Theorem*

Betrachte ein System von N nicht wechselwirkenden, ununterscheidbaren Teilchen mit der Ladung e, welche sich im (Kasten-)Potential $U(\mathbf{q})$ der Form

$$U(\vec{q}) = \begin{cases} 0, & \vec{q} \in V, \\ \infty & \text{sonst}, \end{cases} \tag{2}$$

befinden. Die zugehörige Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \Big[\frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m} + U(\vec{q}_j) \Big]. \tag{3}$$

a) Finde die kanonische Zustandssumme $Z(T, V, N)$ des Systems und berechne daraus die thermodynamischen Grössen F, U, c_V, p und μ.

b) Nehme an, dass zusätzlich ein zeitunabhängiges Magnetfeld $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ wirkt.

   i) Berechne wiederum die Zustandssumme $Z(T, V, N, \vec{A})$ des Systems.
   Hinweis: Beachte, dass sich der kanonische und der kinetische Impuls bei geladenen Teilchen unterscheiden durch den Term $-e\vec{A}/c$ ("minimal coupling").

   ii) Wie hängt die freie Energie vom angelegten Magnetfeld $\vec{B}$ bzw. vom Vektorpotential $\vec{A}$ ab? Was kann man daraus für den Magnetismus in der klassischen Mechanik schliessen? *Das Resultat ist unter dem Namen 'Bohr-van Leeuwen Theorem' bekannt.*
   Hinweis: Die Magnetisierung ist gegeben durch

$$\vec{M} = \langle -\partial_B \mathcal{H} \rangle = k_B T \partial_B \log Z \tag{4}$$