Übung 1. *Otto Motor*

Ein Otto Kreisprozess für ein Gas besteht aus zwei adiabatischen und zwei isochoren Zustandsänderungen wie im untenstehenden Diagramm gezeichnet.

(i) Stelle den skizzierten Kreisprozess in einem $T-S$ Diagramm dar. In welche Richtung muss der Kreisprozess im $T-S$ Diagramm durchlaufen werden, damit (wie im unten stehenden $V-p$ Diagramm) vom System Arbeit verrichtet wird?

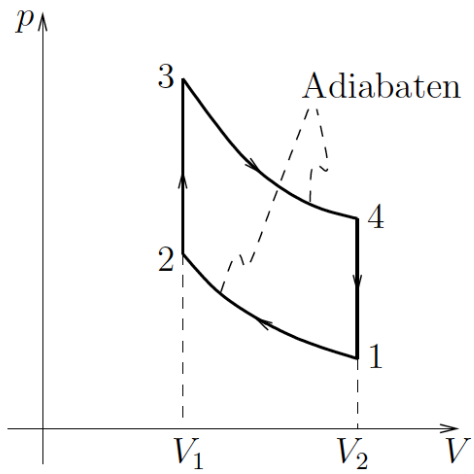
(ii) Berechne den Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{Otto}} := \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} \tag{1}$$

dieser Maschine, wenn als Arbeitssubstanz ein ideales Gas mit $c_V = \text{const}$ verwendet wird.

(iii) Zeige, dass

$$\eta_{\text{Otto}} < \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}. \tag{2}$$

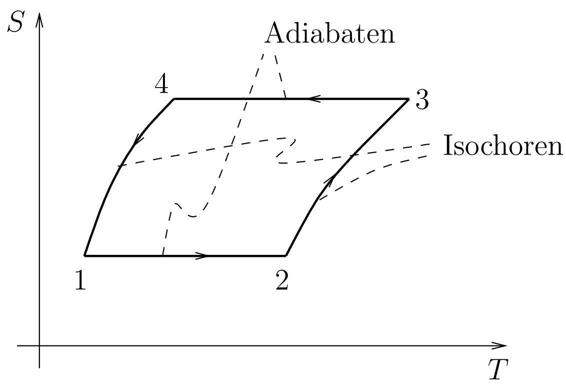


Hinweis: Eine Entropiedifferenz $S - S_0$ des idealen Gases lässt sich berechnen durch:

$$S - S_0 = \int_{T_0}^{T} c_V \frac{dT}{T} + \int_{V_0}^{V} R \frac{dV}{V}. \tag{3}$$

Für einen adiabatischen Prozess haben wir folgende Gleichung, welche T und V in Verbindung setzt:

$$TV^{R/c_V} = T_0 V_0^{R/c_V}. \tag{4}$$



Lösung.

(i) Die Isochoren-Gleichung für reversible Prozesse in den Variablen T, S folgt aus (3),

$$S - S_0 = c_V \log \frac{T}{T_0} \;, \tag{L.1}$$

ebenso die Adiabaten-Gleichung in den Variablen T, V:

$$TV^{R/c_V} = T_0 V_0^{R/c_V} \;. \tag{L.2}$$

Diese Gleichungen erlauben es uns, die Eckpunkte des Prozesses in das $T - S$ Diagramm einzuzeichnen.

Aber Achtung: Bei den isochoren Prozessen handelt es sich um nicht-quasistatische Thermalisierung mit einem Wärmebad. So wird im Prozess $2 \to 3$ das Gas z.B. von T_2 auf $T_3 = T_{\max}$ erhitzt, was hier nicht quasistatisch vonstattengeht, da wir (neben dem der Temperatur $T_1 = T_{\min}$) nur dieses eine Wärmebad der Temperatur T_3 haben und die Thermalisierung deshalb nicht in infinitesimalen Schritten durchführen. Während einem solchen Prozess ist die Temperatur des Systems nicht wohldefiniert. Deshalb ist es eigentlich unzulässig, die Verbindungslinie zwischen 2 und 3 so einzuzeichnen wie dies in der obigen Abbildung getan wurde. Gleiches gilt für den Prozess $4 \to 1$ sowie für die Linien $2 \to 3$ und $4 \to 1$ im $V - p$ Diagramm, da der Druck während diesen Prozessen genau so wenig wohldefiniert ist wie die Temperatur[1].

Die Umlaufrichtung des Kreisprozesses ist in diesem Diagramm im Gegenuhrzeigersinn. Dies folgt direkt, wenn wir die Eckpunkte $1, 2, 3, 4$ Punkt für Punkt vom $V - p$ ins $T - S$ Diagramm bertragen.

Bemerkung: Im Allgemeinen kann es schwierig sein, die Richtung eines Kreisprozesses herauszufinden, in welcher er Arbeit generiert. Dies hängt immer vom betrachteten System und dessen Zustandsgleichungen sowie der Definition von Arbeit ab. Eine allgemeine Vorgehensweise wird im Folgenden am Beispiel des idealen Gases gegeben. Dieses Beispiel ist günstig, da wir das System mit zwei Variablen (z.B. p und V) vollständig beschreiben können.
Zunächst erinnern wir uns an die Definition von Arbeit in einem solchen System: $\delta A = -p\; dV$. Somit ist die erzeugte (oder gebrauchte) Arbeit pro Zyklus gegeben durch

$$A_{\text{tot}} = \oint \delta A = -\oint p\; dV.$$

Diese Arbeit wird erzeugt, wenn $A_{\text{tot}} < 0$, ansonsten wird sie verbraucht (dies hängt gerade von der Richtung ab, in welcher der Kreisprozess abläuft). Um Arbeit zu generieren, verlangen wir also, dass $\oint p\; dV > 0$. Dies ist äquivalent dazu, dass der Prozess im $V - p$ Diagramm (d.h. V auf der x- und p auf der y-Achse) im Uhrzeigersinn abläuft. Es reicht also, den Prozess im $V - p$ Diagramm aufzuzeichnen (was

[1]Man könnte versucht sein zu sagen, dass es im $V - p$ Diagramm eine andere Situation ist, da in einem isochoren Prozess $V =$ const. gilt uns somit der Weg auf der Vertikalen durch V_1 resp. V_2 bleiben muss, was uns die eingezeichneten Teilprozesse $2 \to 3$ und $4 \to 1$ im obigen Diagramm geben würde. Diese Argumentation ist jedoch falsch, da sie implizieren würde, dass der Druck auf dem Weg definiert ist, was nicht der Fall ist.

mann immer kann, da die relevanten Gleichungen, die das System beschreiben, bekannt sein müssen). Wenn man die Richtung in diesem Diagramm hat, ist es ein Leichtes, die Eckpunkte in jedes andere Diagramm unserer Wahl zu übertragen, wiederum unter Verwendung der Zustandsgleichungen und des Wissens über die Teilprozesse des Kreisprozesses. Die Richtung ist dann in den anderen Diagrammen bereits vorgegeben.

(ii)-(iii) Entlang der Adiabaten ist die vom Gas geleistete Arbeit $\delta A^{\nearrow} = -dU = -c_V dT$, also $A_{12}^{\nearrow} = -c_V(T_2 - T_1)$, und über den ganzen Zyklus

$$A^{\nearrow} = A_{12}^{\nearrow} + A_{34}^{\nearrow} = c_V(T_3 - T_4 - (T_2 - T_1)) \ , \tag{L.3}$$

da $A_{23}^{\nearrow} = A_{41}^{\nearrow} = 0$. Wegen der Adiabaten-Gleichung, $(V_2/V_1)^{R/c_V} = T_1/T_2 = T_4/T_3$, ist dies auch

$$A^{\nearrow} = c_V\Big(T_3\big(1 - \frac{T_4}{T_3}\big) - T_2\big(1 - \frac{T_1}{T_2}\big)\Big) = c_V(T_3 - T_2)\big(1 - \frac{T_1}{T_2}\big) \ . \tag{L.4}$$

Die aufgenommene Wärme beträgt $Q_{23} = (U_3 - U_2) + A_{23}^{\nearrow} = c_V(T_3 - T_2)$, und es folgt der Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{Otto}} = \frac{A^{\nearrow}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \ , \tag{L.5}$$

da $T_1 = T_{\min}$, $T_2 < T_3 = T_{\max}$.

Bemerkung: Wie wir in Teilaufgabe (i) bereits festgestellt haben, sind die Prozesse $2 \to 3$ und $4 \to 1$ irreversibel. Dies impliziert bereits, dass der Otto Prozess einen kleineren Wirkungsgrad haben muss als der optimale Carnot-Wirkungsgrad.

Übung 2. *Zustandsgleichung magnetischer Substanzen*

Ein isotropes magnetisches Material befinde sich in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{H}$ im Inneren einer langen Spule. Die von der Spule am Material geleistete reversible Arbeit, bezogen auf ein Einheitsvolumen, ist gegeben durch

$$\delta A = H dM \ . \tag{5}$$

Dabei ist M die Magnetisierung des Materials, welche wir bereits am Ende der Physik II Vorlesung kennengelernt haben. Wegen der Isotropie des Materials entfällt der Vektorcharakter von H und M.

(i) Schreibe die Entropie des Systems als $S = S(T, H)$ und leite daraus einen Zusammenhang zwischen der Magnetisierung $M = M(T, H)$ (thermische Zustandsgleichung) und der Inneren Energie $U = U(T, H)$ (kalorische Zustandsgleichung) her.

Hinweis: dS ist ein exaktes Differential.

(ii) Eine paramagnetische Substanz erfüllt das Curie-Gesetz

$$M = K \cdot \frac{H}{T} \ , \tag{6}$$

mit einer materialabhängigen Konstante K.

Nutze diese Tatsache um zu zeigen, dass U nur von T abhängt.

Lösung.

(i) Das Differential der Entropie ist gegeben durch

$$dS = \frac{1}{T}\delta Q \tag{L.6}$$
$$= \frac{1}{T}\left[dU - HdM\right] \tag{L.7}$$
$$= \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - \frac{H}{T}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T - \frac{H}{T}\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\right]dH \tag{L.8}$$

Aus der Tatsache, dass dS ein totales Differential ist, folgt $\frac{\partial^2 S}{\partial H \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial H}$. Dies führt zur Gleichung

$$-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T + \frac{H}{T^2}\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \; . \tag{L.9}$$

Nach dem Umstellen der partiellen Ableitungen finden wir die Relation

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \; , \tag{L.10}$$

welche die thermische mit der kalorischen Zustandsgleichung verknüpft.

(ii) Setzen wir das Curie-Gesetz in Gleichung (L.10) ein, so finden wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = -T \cdot \frac{KH}{T^2} + H \cdot \frac{K}{T} = 0 \; , \tag{L.11}$$

sodass $U(T,H) = U(T,0)$ unabhängig von H ist.

Übung 3. *Magnetische Carnot-Maschine*

Wir betrachten ein paramagnetisches Material wie in Aufgabe 2(ii), welches eine konstante Wärmekapazität $C_M = \frac{\partial U}{\partial T}\big|_M$ aufweist. Es soll als Carnot-Maschine zwischen zwei Wärmereservoirs der Temperaturen $T_2 > T_1$ verwendet werden.

(i) Finde die Adiabatengleichung des Systems und skizziere einen Zyklus der Maschine in einem T-M Diagramm. In welche Richtung muss der Kreisprozess durchlaufen werden, sodass die Maschine Arbeit verrichtet?

(ii) Wie gross ist die Arbeit, welche die Maschine in einem Zyklus verrichtet?

(iii) Berechne den Wirkungsgrad der Maschine und setze ihn in Verbindung mit dem Wirkungsgrad einer Carnot Maschine, die mit den selben Wärmebädern (T_1 und T_2) arbeitet

Lösung.

(i) Mit der Kettenregel finden wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T = 0 \; , \tag{L.12}$$

wobei wir das Ergebnis der vorigen Aufgabe verwendet haben[2]. Mit der konstanten Wärmekapazität $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M = C_M$ können wir nun

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M dT + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T dM \tag{L.13}$$
$$= C_M dT \tag{L.14}$$

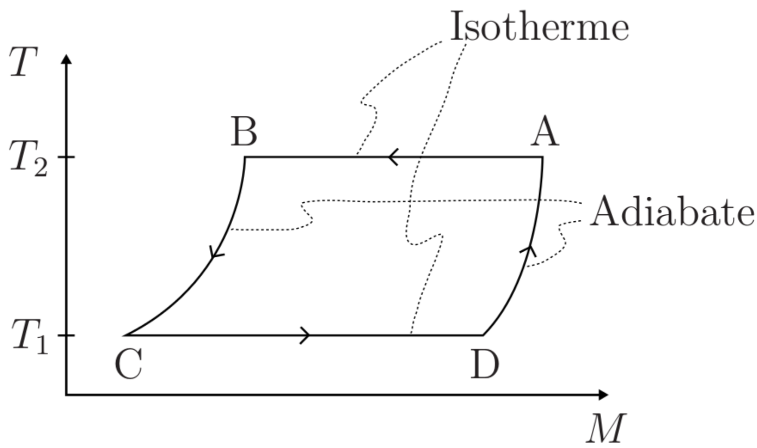
[2] *Achtung*: Die Kettenregel darf man hier nur so anwenden, weil wir das Curie-Gesetz angenommen haben. Sie entspricht dann einer direkten Anwendung von Aufgabe 2)c) aus Serie 1, wobei nun $x \widehat{=} U, y \widehat{=} H, z \widehat{=} T$ und $w \widehat{=} M$. Das Curie-Gesetz ist deshalb wichtig, weil wir M als Funktion von T und H auffassen müssen. In der Herleitung der Relation in 2)c) aus Serie 1 war das die Tatsache, dass w als $w = w(y,z)$ gesehen werden kann.

schreiben.
Für adiabatische Zustandsänderungen ist $\delta Q = 0$, also $dU = HdM$. Setzen wir hier $dU = C_M dT$ sowie das Curie-Gesetz $H = \frac{MT}{K}$ ein, so finden wir

$$\frac{KC_M}{T} dT = MdM \ . \tag{L.15}$$

Wir integrieren diese Gleichung und finden die Adiabatengleichung

$$KC_M \log\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{1}{2}\left(M^2 - M_0^2\right) \ . \tag{L.16}$$



(ii) Die zugeführte Arbeit entlang der Kurve A-B ist

$$A_{\mathrm{AB}} = \int_{M_{\mathrm{A}}}^{M_{\mathrm{B}}} HdM \tag{L.17}$$

$$= \frac{T_2}{K} \int_{M_{\mathrm{A}}}^{M_{\mathrm{B}}} MdM \tag{L.18}$$

$$= \frac{T_2}{2K}\left(M_{\mathrm{B}}^2 - M_{\mathrm{A}}^2\right) < 0 \ . \tag{L.19}$$

Auf die gleiche Weise finden wir

$$A_{\mathrm{CD}} = \frac{T_1}{2K}\left(M_{\mathrm{D}}^2 - M_{\mathrm{C}}^2\right) > 0 \ , \tag{L.20}$$

während dem Prozess C-D wird also Arbeit zugeführt und während dem Prozess A-B wird Arbeit verrichtet.
Für die Arbeit während der adiabatischen Zustandsänderungen finden wir mit dem 1. Hauptsatz

$$A_{\mathrm{BC}} = U_{\mathrm{C}} - U_{\mathrm{B}} = C_M(T_1 - T_2) = -A_{\mathrm{DA}} \ . \tag{L.21}$$

Aus der Adiabatengleichung (L.16) folgt

$$KC_M \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{1}{2}\left(M_{\mathrm{B}}^2 - M_{\mathrm{C}}^2\right) = \frac{1}{2}\left(M_{\mathrm{A}}^2 - M_{\mathrm{D}}^2\right) \tag{L.22}$$

$$\Rightarrow M_{\mathrm{C}}^2 - M_{\mathrm{D}}^2 = M_{\mathrm{B}}^2 - M_{\mathrm{A}}^2 \ . \tag{L.23}$$

Die gesamte während einem Zyklus *zugeführte* Arbeit ist also

$$A = A_{\mathrm{AB}} + A_{CD} \tag{L.24}$$

$$= \frac{1}{2K}\left[T_2\left(M_{\mathrm{B}}^2 - M_{\mathrm{A}}^2\right) + T_1\left(M_{\mathrm{D}}^2 - M_{\mathrm{C}}^2\right)\right] \tag{L.25}$$

$$= \frac{T_2}{2K}\left(M_{\mathrm{B}}^2 - M_{\mathrm{A}}^2\right)\left[1 - \frac{T_1}{T_2}\right] \ . \tag{L.26}$$

(iii) Nur im Teilprozess A-B wird Wärme aufgenommen. Wegen $U_{\rm B} = U_{\rm A}$ folgt aus dem 1. Hauptsatz

$$Q_{\rm AB} = -A_{\rm AB} = -\frac{T_2}{2K}\left(M_{\rm B}^2 - M_{\rm A}^2\right) \ . \tag{L.27}$$

Da von der Maschine die Arbeit $-A$ verrichtet wird, ist der Wirkungsgrad gegeben durch

$$\eta = -\frac{A}{Q_{\rm AB}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \tag{L.28}$$

und somit gerade gleich gross, wie bei einer Carnot-Maschine mit einem idealen Gas.

Bemerkung: Dieses Resultat wurde ohne explizite Verwendung des 2. Hauptsatzes hergeleitet. Implizit geht er dadurch ein, dass die postulierten Zustandsgleichungen $M = M(T, H)$ und $U = U(T, H)$ kompatibel sind, vgl. Aufgabe 2.