ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Quantenmechanik I
Serie 2

Herbst 2008
Prof. R. Renner

Aufgabe 2.1 Spektral- und Eigenwerte

In endlich-dimensionalen komplexen Hilberträumen besteht das Spektrum eines Operators aus seinen Eigenwerten. Im unendlich-dimensionalen Fall ist dies im allgemeinen nicht mehr so. Wir wollen im folgenden dazu ein explizites Beispiel betrachten.
Der unendlich-dimensionale Hilbertraum sei dabei der Raum der quadratsummierbaren Folgen l_2. Die Abbildung sei die einseitige Verschiebung

$$S\,:\,l_2 \longrightarrow l_2\,,\quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)\,.$$

a) Zeige, daß S keinen Eigenwert besitzt.

Obwohl S keinen Eigenwert besitzt, ist sein Spektrum nicht leer. Tatsächlich besteht es aus der Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$. Um dies zu zeigen, benötigen wir einige allgemeine Vorbereitungen. Für die Teilaufgaben b) bis d) sei T ein beschränkter Operator auf einem komplexen Hilbertraum.

b) Zeige, daß Spektralwerte vom Betrag her nicht größer als die Norm ihres Operators sein können:

$$\lambda \in \mathbb{C}\,:\quad |\lambda| > \|T\| \;\Rightarrow\; \lambda \notin \sigma(T)\,.$$

Hinweis: Benutze Satz 1.2 aus der Vorlesung.

c) Zeige, daß $\sigma(T)$ abgeschloßen ist.
Hinweis: Benutze die Stetigkeit von $f(\lambda) := \lambda - T$ und zeige, daß die Menge aller invertierbaren Operatoren offen ist.

d) Zeige, daß das Spektrum des adjungierten Operators aus den komplex konjugierten Spektralwerten besteht:

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda}\,:\,\lambda \in \sigma(T)\}\,.$$

Nun kehren wir zu unserem Beispiel zurück und zeigen

e) Die Eigenwerte der Abbildung S^* bilden die offene Einheitsscheibe:

$$|\lambda| < 1 \;\Rightarrow\; \lambda \text{ ist Eigenwert von } S^*\,.$$

Hinweis: S^* ist gegeben durch

$$S^*\,:\,l_2 \longrightarrow l_2\,,\quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)\,.$$

Konstruiere einen expliziten Eigenvektor zu einem Eigenwert λ.

f) Zeige mit Hilfe der Resultate b) bis e), daß

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,:\,|\lambda| \leq 1\}\,.$$

Aufgabe 2.2 Ununterscheidbarkeit statistischer Ensembles

Diese Aufgabe soll zeigen, daß sich aus einer Dichtematrix das zugrundeliegende Ensemble im allgemeinen nicht bestimmen lässt. Betrachte dazu ein System mit einem zweidimensionalen komplexen Hilbertraum als Zustandsraum. Zunächst sei dieses System mit Wahrscheinlichkeit 1/2 im Zustand $|e_1\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 im Zustand $|e_2\rangle$ für eine orthonormale Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ präpariert. Betrachte das System dann in der analogen Situation, jedoch mit den Zuständen

$$|f_1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle), \qquad |f_1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - |e_2\rangle)$$

anstelle von $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$.

a) Berechne die Dichtematrizen für beide Ensembles in der Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$.

b) Eine Dichtematrix definiert für einen Operator A ein Wahrscheinlichkeitsmaß, mit dessen Hilfe aus dem Spektrum von A der Erwartungswert $\rho(A)$ im Zustand des Systems bestimmt wird. Bestimme in unserem Beispiel, wie dieses Maß für einen Operator $A = \sum_{i=1,2} a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ aussieht (die Zustände $|a_i\rangle$ seien orthonormiert).

Aufgabe 2.3 Tensorprodukt und verschränkte Zustände

a) Gegeben seien die Dichtematrizen

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Berechne das Tensorprodukt $\tau = \rho \otimes \eta$ in der Standardbasis.

b) Es seien V, W und Z drei Hilberträume. Verifiziere, daß

$$(V \otimes W) \otimes Z \cong V \otimes (W \otimes Z) .$$

c) Es seien V, W zwei zweidimensionale Hilberträume mit Basen $\{v_1, v_2\} \subset V$ und $\{w_1, w_2\} \subset W$. Zeige, daß kein Paar von Vektoren $v \in V$ iund $w \in W$ existiert, so daß

$$v \otimes w = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 .$$

Zustände, die nicht in der Form $v \otimes w$ darstellbar sind, heißen "verschränkt".