ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Quantenmechanik I
Serie 3

Herbst 2008
Prof. R. Renner

Aufgabe 3.1 Leiteroperatoren

Es seien a und $a^\dagger$ Operatoren auf einem unendlich-dimensionalen separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, dessen Basis wir mit $\{|k\rangle\}_{k\in I}, I = \{0,1,2,\ldots\}$ bezeichnen. Die Operatoren a und $a^\dagger$ sollen folgende Eigenschaft haben

$$\begin{aligned} a^\dagger|k\rangle &= \sqrt{k+1}|k+1\rangle, \\ a|k\rangle &= \sqrt{k}|k-1\rangle. \end{aligned}$$

i. Zeigen Sie, dass a und $a^\dagger$ die Vertauschungsrelation

$$[a, a^\dagger] = 1$$

erfüllen.

ii. Wir definieren zusammengesetzte Operatoren $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right)$ und $P = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger)$. Zeigen Sie dass Q und P die *kanonische Vertauschungsrelation*

$$[Q, P] = i$$

erfüllen

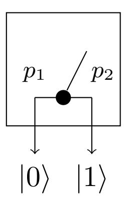
iii. Wir wählen die Standardbasis des Hilbertraums $\mathbb{R}^\infty$, $\{e_i\}_{i\in I}$, und wählen folgende Notation $|0\rangle := e_1, |1\rangle := e_2, \ldots$. Geben Sie eine Matrixdarstellung von a und $a^\dagger$ an und zeigen Sie anhand eines endlich-dimensionalen Hilbertraumes dass die Vertauschungsrelation aus Aufgabenteil (i.) im endlich-dimensionalen nicht mehr gilt.

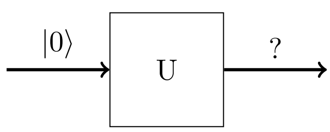
iv. Wir konstruieren mit Hilfe von a und $a^\dagger$ einen neuen Operator $N = a^\dagger a$. Zeigen Sie, dass N hermitsch ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von N
Hinweis: Untersuchen Sie wie N auf $|k\rangle$ wirkt.

Zeigen Sie mit Hilfe von N und der Vertauschungsrelation aus Aufgabenteil (i.) dass $a^\dagger|k\rangle$ Eigenvektor von N zum Eigenwert $k+1$ ist.

Aufgabe 3.2 Dichtematrizen

In dieser Aufgabe wollen wir den grundlegenden Unterschied zwischen einem Gemisch von Zuständen und einer Superposition von Zuständen verdeutlichen. Dazu betrachten wir die beiden folgenden Gedankenexperimente, wobei wir uns auf einen zwei-dimensionalen Hilbertraum beschränken.

(I)


(II)


Experiment (I): Nehmen Sie an Sie besitzen eine Black Box welche es Ihnen erlaubt zwei orthogonale Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ zu präparieren, je nachdem in welche Richtung der Hebel zeigt. Nehmen Sie an der Hebel zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit p_1 nach links und mit einer Wahrscheinlichkeit p_2 nach rechts.
Experiment (II): Ein quantenmechanisches System im Zustand $|0\rangle$ wechselwirkt mit einem weiteren System dessen Wirkung auf einen Zustand $|\psi\rangle$ durch eine Evolution der Form $U : |\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$

beschrieben wird, wobei

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

i. Bestimmen Sie die Dichtematrizen zu beiden Experimenten. Geben Sie insbesondere beim ersten Experiment an welche Dichtematrix Sie einem einzelnen Zustand zuordnen (a) wenn Sie wissen in welche Richtung der Hebel zeigt (z.B. nach rechts), (b) wenn Sie nicht wissen in welche Richtung der Hebel zeigt. Geben Sie auch an, ob die entsprechenden Dichtematrizen reine oder gemischte Zustände beschreiben.

ii. Zeigen Sie, dass ein Zustand genau dann ein reiner Zustand ist, wenn $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$. Zeigen Sie damit, dass unitäre Operatoren reine Zustände nur in reine Zustände überführen.

iii. Ist der oben angegebene Operator U unitär?

Aufgabe 3.3 Zusammengesetzte Systeme

$$\boxed{\mathrm{A}} \quad \longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\; |\psi\rangle \;-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{B}}$$

Es sei $V \otimes W$ ein Tensorprodukt zweier separabler Hilberträume mit Basen $\{v_i\}_{i \in I}$ und $\{w_j\}_{j \in J}$ Betrachten Sie ein quantenmechanisches System im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|v_1\rangle_A \otimes |w_1\rangle_B + |v_2\rangle_A \otimes |w_2\rangle_B \right).$$

Beide Teilsysteme bewegen sich in entgegengesetzter Richtung auf Messapparaturen A und B zu (Siehe Abb.), welche eine Messung M_ϕ durchführen, die durch einen kontinuierlichen Parameter ϕ parametrisiert wird. Es sei $|\phi\rangle := \cos(\phi)|v_1\rangle + \sin(\phi)|v_2\rangle$ und $|\phi^\perp\rangle := \sin(\phi)|v_1\rangle - \cos(\phi)|v_2\rangle$. Wir beschreiben die Messung bei A durch eine Menge $\mathcal{M}_A = \{|\phi\rangle\langle\phi|, \left(|\phi\rangle\langle\phi| + |\phi^\perp\rangle\langle\phi^\perp|\right)^\perp, |\phi^\perp\rangle\langle\phi^\perp|\}$ von orthogonalen Projektoren. Den Projektoren ordnen wir, in gleicher Reihenfolge, die Messergebnisse $-1, 0$ und $+1$ zu.

i. Nehmen Sie an, dass A eine Messung durchführt und B nicht. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messergebnisse und die entsprechenden Zustände von B aus Sicht von A an.

ii. Wir setzen $\phi = 0$. Nehmen Sie an, das Ergebnis einer Messung des Teilsystems A war $+1$. Welche Dichtematrix würde man für das Teilsystem B ansetzten wenn das Ergebnis der Messung bei A nicht bekannt ist.

iii. Warum führt die subjektive Zuordnung von Dichtematrizen zu keinem Widespruch in den beobachteten Messwerten von B?