ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Quantenmechanik I
# Serie 8

Herbst 2008
Prof. R. Renner

---

### Aufgabe 8.1 Rotationen im Koordinatenraum

Wir betrachten die Familie von unitären Operatoren

$$U(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{L}/\hbar}\,, \tag{1}$$

wobei $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$, $|\vec{n}|^2 = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

a) *Zeige, dass (1) ein Rotationsoperator im Koordinatenraum ist für infinitesimale $\delta\vec{\theta}$.*

### Aufgabe 8.2 Spin-1/2 Operatoren und ihre Pauli-Matrix Darstellung

In der letzten Übungsserie haben wir gesehen, dass die Operatoren $J_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, welche

$$[J_j, J_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}J_l\,, \tag{2}$$

erfüllen, ein gemeinsames Eigensystem von $J^2$ und einem $J_j$ besitzen welches (wir wählen hier $j = 3$) gegeben ist durch

$$J^2|lm\rangle = l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle\,, \tag{3}$$

$$J_3|lm\rangle = \hbar m|l,m\rangle\,. \tag{4}$$

Wir betrachten nun den Fall von Spin-1/2 Freiheitsgraden was dem Fall $l = \frac{1}{2}$ entspricht, und nennen die entsprechen Operatoren $S_j$.

a) Konstruiere die Pauli Matrixdarstellung $\sigma_j$ der $S_j$, gegeben durch $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$.

b) Zeige folgende Relationen für die Pauli Matrizen.

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,, \tag{5}$$

wobei $\sigma_0$ die $2 \times 2$ Identitätsmatrix ist, und

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \sigma_0(\vec{a}\cdot\vec{b}) + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})\,. \tag{6}$$

Hierbei sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren mit drei Komponenten.

### Aufgabe 8.3 Rotationen im Spinraum

Wir betrachten nun eine Rotation im Spinraum

$$V(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{S}/\hbar}\,.$$

a) Gib eine Matrixdarstellung von $V(\vec{\theta})$ an.

b) Wir betrachten nun einen Spin-1/2 Freiheitsgrad, dessen Quantisierungsachse $\vec{e}$ ($|\vec{e}|^2 = 1$) die $z$-Achse ist, und welcher sich im $|1/2, 1/2\rangle$ Eigenzustand von $S_z$ befindet (wir assoziieren die $1, 2, 3$-Komponenten der vorherigen Aufgabe mit den $x, y, z$-Komponenten). Desweiteren werde eine Rotation um die $x$-Achse mit Winkel $\pi/2$ ausgeführt. Was ist der Effekt dieser Rotation auf den Spin?

c) Betrachte nun allgemein den Effekt einer Rotation im Spinraum auf die Quantisierungsachse $\vec{e}$:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{e}' = V(\vec{\theta})^\dagger\vec{\sigma}\cdot\vec{e}\,V(\vec{\theta})\,.$$

d) Welchen Effekt hat eine Rotation um $\vec{\theta} = 2\pi\vec{n}$ auf die Quantisierungsachse ? Welchen Effekt hat dieselbige auf einen Zustand ?

### Aufgabe 8.4 Wasserstoffatom und der Lenz Vektor

Die $(2l+1)$-fache Entartung des Energiespektrums des Wasserstoffatoms ist eine Konsequenz der Erhaltung der Drehimpulses. Die totale $n^2$-Entartung im Wasserstoffatom ist eine Konsequenz einer weiteren Erhaltungsgrösse, des Lenz'schen Vektors. Hier möchten wir die $n^2$-Entartung herleiten. Der Lenz'sche Vektor ist gegeben durch ($|\vec{r}| = r$)

$$\vec{R} = \frac{1}{2m}(\vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{L} \wedge \vec{p}) - \frac{e}{r}\vec{r},$$

wobei $m$ die reduzierte Masse bezeichnet, und $\vec{p}$, $\vec{r}$ und $\vec{L}$ die Impuls-, Orts-, und Drehimpulsoperatoren sind.

a) Zeige, dass $[H, R_j] = 0$, $j = 1, 2, 3$.

b) Es gilt $\vec{L} \cdot \vec{R} = 0$, und

$$R^2 = e^4 + \frac{2H(L^2 + \hbar^2)}{m},$$

d.h. der Hamiltonian kann als Funktion der Erhaltungsgrössen $L^2$ und $R^2$ ausgedrückt werden. Wir führen einen neuen Operator

$$\vec{K} = \sqrt{\frac{-m}{2H}}\vec{R}$$

ein. Es lässt sich einfach zeigen, dass

$$[K_i, K_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k, \tag{7}$$
$$[K_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}K_k\,, \tag{8}$$

und

$$H = \frac{me^4}{2(K^2 + L^2 + \hbar^2)}\,. \tag{9}$$

Der Operator $\vec{K}$ is hermitesch nur für $H$ negativ (aber wir interessieren uns hier ja für die gebundenen Zustände des Hamiltonians). Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{\vec{L} + \vec{K}}{2}\,, \\ \vec{W} &= \frac{\vec{L} - \vec{K}}{2}\,. \end{aligned}$$

Zeige, dass

$$\begin{aligned} [V_i, V_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k\,, \\ [W_i, W_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}W_k\,, \\ [V_i, W_j] &= 0\,. \end{aligned}$$

c) Schreibe den Hamilton Operator als Funktion von $\vec{V}$ und $\vec{W}$.

d) Konstruiere den Eigenzustand des Hamiltonians unter Verwendung der bisherigen Resultate.

e) Bestimme den Grad der Entartung der Energieeigenwerte.