# Quantenmechanik I
# Serie 12

Herbst 2008
Prof. R. Renner

## Aufgabe 12.1 Eichtransformationen und Observablen

In der Aufgabe 11.2 wurde untersucht, wie sich das elektrische Potential $\Phi$, das Vektorpotential $\mathbf{A}$, sowie die Wellenfunktion $\Psi$ unter Eichtransformationen verhalten, damit die Schrödinger Gleichung forminvariant bleibt. Zur Vereinfachung beschränken wir uns hier auf statische Felder. Man findet dann (siehe 11.2):

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}^{'} = A + \nabla\chi, \qquad \Phi \to \Phi^{'} = \Phi, \qquad \Psi \to \Psi^{'} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right)\Psi. \tag{1}$$

Wir wollen jedoch auch, dass Observablen eichinvariant sind in dem Sinn, dass ihre Matrixelemente invariant unter Eichtransformation bleiben. Für eine Observable $O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi)$ fordern wir nun:

$$\langle\Psi|O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi)|\Psi\rangle = \langle\Psi^{'}|O(\mathbf{p}, \mathbf{A}^{'}, \Phi^{'})|\Psi^{'}\rangle. \tag{2}$$

Die linke Seite kann geschrieben werden als:

$$\langle\Psi|O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi)|\Psi\rangle = \langle\Psi^{'}|O^{'}(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi)|\Psi^{'}\rangle, \tag{3}$$

wobei

$$O^{'}(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right) O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\chi\right) \tag{4}$$

die unitäre Transformation ist die $O$ nach $O^{'}$ abbildet. Die resultierende notwendige und hinreichende Bedingung,

$$O^{'}(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi) = O(\mathbf{p}, \mathbf{A}^{'}, \Phi^{'}) \tag{5}$$

ist genau dann erfüllt ist, wenn

$$O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi) = O(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}, \Phi). \tag{6}$$

a) Leite unter der Annahme von (6) die Gleichung (2) her.

b) Wir nehmen jetzt an, der kanonische Impuls $\mathbf{p}$ sei unsere Observable. Was folgt daraus wenn man die Herleitung aus a) wiederholt?

## Aufgabe 12.2 Zeeman-Aufspaltung

In Gegenwart eines Magnetfeldes erhält der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms einen zusätzlichen Term, der gegeben ist durch

$$H_M = \mu_B(\vec{L} + 2\vec{S})\vec{B} = \mu_B(\vec{J} + \vec{S})\vec{B} \tag{7}$$

Wir wollen die Energieaufspaltung der ursprünglich entarteten Energieniveaus berechnen. O.B.d.A kann man annehmen, dass das Magnetfeld in z-Richtung zeigt. Desweiteren nehmen wir an, dass der gesamte Hamiltonoperator diagonal bezueglich des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J}$ ist, die Eigenfunktion lassen sich also in der Form $|n\ j\ m\ l\ s\rangle$ schreiben. $l$ sei beliebig aber fest.

a) Was für Werte von $j$ sind möglich? Liste alle Kets auf, die bei verschiedenem $j$ und gleichem $m_j$ ein nicht verschwindendes Matrixelement für obigen Hamiltonian liefern. Drücke diese Kets mit Hilfe der Clebsch-Gordan Koeffizienten in der Basis $|n\ l\ s\ m_l\ m_s\rangle$ aus.

b) Berechne die Matrixelemente für $H_M$. Bestimme anschliessend die Eigenwerte der Matrix und daraus die Energieaufspaltung.

**Aufgabe 12.3 Spin-Präzession**

Ein Elektron im Magnetfeld $\mathbf{B}$ besitze nur einen Spinfreiheitsgrad und werde somit durch den Hamilton-Operator

$$H = 2\frac{\mu_B}{\hbar}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$$

beschrieben. Berechne die Zeitabhängigkeiten der Erwartungswerte

$$\langle S_x\rangle_t\,, \quad \langle S_y\rangle_t\,, \quad \langle S_z\rangle_t\,.$$

Wähle als z-Richtung die des Magnetfeldes $\mathbf{B}$.