Quantenmechanik I
Serie 7

Aufgabe 7.1 Zeeman-Effekt

Wir betrachten das Elektron eines Wasserstoffatoms in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$, beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{e^2}{|\vec{r}|}, \quad e > 0. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass wir für ein homogenes Feld $\vec{B}$ das Vektorpotenzial schreiben können als

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}. \tag{2}$$

Welche Eichung haben wir somit gewählt?

(b) In (1) kann man für schwache Magnetfelder in erster Näherung den Term quadratisch in $\vec{B}$ vernachlässigen. Zeige für $\vec{B} \parallel \hat{z}$, dass mit dieser Nähereung die stationären Lösungen des Wasserstoffatoms auch stationäre Lösungen von (1) sind. Welche Entartung wird durch das Anlegen eines Magnetfeldes aufgehoben?
Die stärksten Permanentmagnete der Welt sind in der Lage, Felder bis zu 45 Tesla zu erzeugen. Wie gross ist die Aufspaltung der Niveaus im Wasserstoffatom für solch ein Feld?

Aufgabe 7.2 Transfermatrix Formalismus

Wir betrachten ein 1-D Potenzial der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & 0 \leq x \leq w \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Die allgemeine Form der Wellenfunktion für eine Energie $0 < E < V_0$ in den drei Gebieten (links, Mitte, rechts) lautet

$$\Psi^{(l)} = ae^{ikx} + be^{-ikx} \tag{4}$$
$$\Psi^{(m)} = \alpha e^{-\kappa x} + \beta e^{\kappa x} \tag{5}$$
$$\Psi^{(r)} = Ae^{ik(x-w)} + Be^{-ik(x-w)}, \tag{6}$$

wobei $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ und $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$.
Die Stetigkeitsbedingung für $\Psi(x)$ und $\Psi'(x)$ bei 0 und w kann in Form einer Gleichung für die Amplituden geschrieben werden mit Hilfe des Transfermatrix Formalismus,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Berechne $M = M_1 M_t M_2$, wobei gelten soll

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad M_t = \begin{pmatrix} e^{\kappa w} & 0 \\ 0 & e^{-\kappa w} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{M_t^{-1}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathrm{M_2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Aufgabe 7.3 Streumatrix

Eine andere Art, die Stetigkeitsbedingungen zu schreiben, ist die Streumatrix, die die eingehende Welle mit der ausgehenden Welle verbindet:

$$\Psi_{out} = \begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r' \\ r & t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix} = S\Psi_{in}. \tag{9}$$

(a) Zeige, dass aus der Teilchenzahlerhaltung folgt, dass S unitär ist.

(b) Zeige für zeitumkehrinvariante Probleme (kein Magnetfeld), dass $t = t'$.

Für ein spiegelsymmetrisches Potenzial folgt ausserdem, dass $r = r'$. Die Elemente von S haben nun die einfache Interpretation einer Transmissionsamplitude (t), sowie einer Reflektionsamplitude (r).

Aufgabe 7.4 Tunnelprozess

Berechne die Transmissionswahrscheinlichkeit $T = |t|^2$ für die Tunnelbarriere in Aufgabe 7.2 mit Hilfe des Transfermatrix Formalismus und zeige, dass es eine (exponentiell unterdrückte) Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen gibt, durch die Barriere "durchzutunneln".

Aufgabe 7.5 Resonanzen

Gegeben sei ein Potenzial der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 < 0 & 0 \leq x \leq w \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{10}$$

(a) Wie muss ich M für Streuzustände ($E > 0$) im Vergleich zu 7.2 anpassen?

(b) Berechne und plotte $|t|^2$ und zeige, dass im Allgemeinen ein Teil der Welle reflektiert wird. Für welche Energien wird die ganze Welle transmittiert?

(c) Betrachte die Nullstellen von t^{-1} und zeige, dass diese mit der Bedingung von gebundenen Zuständen aus Serie 6 zusammen fallen.

(d) * Betrachte zusätzliche Potenzialbarrieren der Breite a und Höhe V_b um den Potenzialtopf herum. Versuche die Methode der Transfermatrizen zu verallgemeinern auf dieses Problem und berechne die Transmissionswahrscheinlichkeit. Was fällt auf wenn man $|t(E)|^2$ erneut plottet?

Aufgabe 7.6 Streuung eines Wellenpaketes

Wir betrachten ein Wellenpaket,

$$\Psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k)\Psi_k(t) \tag{11}$$

mit $f(k)$ stark gepeaked um k_0 und kompaktem Träger. Zudem sei $\Psi_k(t) = \Psi_k e^{-i\hbar k^2 t/2m}$ und Ψ_k ein Streuzustand,

$$\Psi_k = \begin{cases} e^{ikx} + \tilde{r}e^{-ikx} & x < 0 \\ \tilde{t}e^{ikx} & x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Zeige mit Hilfe der Methode der stationären Phase, dass dies gerade einem Wellenpaket entspricht, das zur Zeit $t \ll 0$ von links auf den Streuer geschickt wird und für $t \gg 0$ aus einem reflektierten und einem transmittierten Wellenpaket besteht.