Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Quantenmechanik I
Serie 11

HS 2009
Prof. Fröhlich

Aufgabe 11.1 Das Theorem von Peter und Weyl im Spezialfall $G = SU(2)$

Mit Hilfe der Abbildung $\Phi : S^3 \to SU(2)$,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(ein Diffeomorphismus) lassen sich Masse auf $SU(2)$ durch Masse auf S^3 ausdrücken und umgekehrt. Man kann zeigen, dass dann das Haarsche Mass μ auf $SU(2)$ dem rotationsinvarianten, normierten Mass ν auf S^3 entspricht:

$$\mu(A) = \nu(\Phi^{-1}(A)) \tag{2}$$

für alle messbaren Mengen $A \subset SU(2)$. Zu jedem $U \in SU(2)$ existieren $\alpha \in [0, \pi)$[1] und $V \in SU(2)$, so dass $U = VU(\alpha)V^{-1}$ mit

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Gleichzeitig sind $U(\alpha_1)$ und $U(\alpha_2)$ mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi)$) inäquivalent. Demnach lassen sich die Konjugationsklassen von $SU(2)$ durch $\alpha \in [0, \pi)$ parametrisieren. Die zu α gehörende Konjugationsklasse bezeichnen wir mit $[\alpha]$. Nach der Anwendung von Φ entspricht der Parameter $\alpha \in [0, \pi)$ dem Winkel $\theta \in [0, \pi)$ in der Polarkoordinaten-Parametrisierung

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta \\ x_2 &= \sin\theta\cos\beta \\ x_3 &= \sin\theta\sin\beta\cos\gamma \\ x_4 &= \sin\theta\sin\beta\sin\gamma \end{aligned} \tag{4}$$

($\theta, \beta \in [0, \pi)$ und $\gamma \in [0, 2\pi)$) der S^3. Die Abbildung Φ bildet demnach jeden "S^2-Grosskreis" $\{x(\theta, \beta, \gamma) | \theta = \theta_0\}$ in S^3 auf die zugehörige Konjugationsklasse $[\theta_0]$ in $SU(2)$ ab.

(a) Sei Ω das rotationsinvariante, normierte Mass auf der S^3, welches über (2) das Haarsche Mass auf $SU(2)$ definiert. Zeige, dass

$$d\Omega = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2\theta \sin\beta \, d\theta d\beta d\gamma. \tag{5}$$

Mit dem Skalarprodukt

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_{SU(2)} \overline{f_1(g)} f_2(g) \, d\mu(g) \tag{6}$$

wird der Raum $L^2(SU(2), \mu)$ zu einem Hilbertraum. Das Peter-Weylsche Theorem besagt, dass die Charaktere $\{\chi_{\pi_j}\}_j$ ein VONS im Raum der Klassenfunktionen (ein linearer Unterraum in $L^2(G, \mu)$) bilden.

(b) Beweise das Peter-Weylsche Theorem im vorliegenden Spezialfall $G = SU(2)$.

[1]Nicht $[-\pi, \pi)$, weil $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$.

Hinweise: (1) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\chi_j(U) = \frac{\sin(2j+1)\alpha}{\sin(\alpha)} \tag{7}$$

für alle $U \in [\alpha]$; (2) Aus dem expliziten Ausdruck für das Haarsche Mass der $SU(2)$ ergibt sich

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \overline{F_1(\alpha)} F_2(\alpha) \sin^2(\alpha)\, d\alpha \tag{8}$$

für alle Klassenfunktionen F_1, F_2.

Aufgabe 11.2 Die Clebsch-Gordan Reihe für $SU(2)$

Ziel dieser Aufgabe ist die Ausreduktion der Tensorprodukt-Darstellung $D_{j_1} \otimes D_{j_2}$ von $SU(2)$:

$$D_{j_1} \otimes D_{j_2} = \bigoplus_j D_j \otimes \mathbb{C}^{N^j_{j_1 j_2}}. \tag{9}$$

Hinweise: (1) Die Spur ist additiv unter der Operation "direkte Summe" und multiplikativ unter der Operation "Tensorprodukt"; (2) in der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\chi_j(U) = \sum_{m=-j}^{j} e^{2im\alpha} \tag{10}$$

für alle $U \in [\alpha]$ ($[\alpha]$ bezeichnet die zum Winkel α gehörende Konjugationsklasse von $SU(2)$).

Aufgabe 11.3 Bellsche Ungleichung

Eine *klassischen Theorie* setzt sich zusammen aus einem Zustandsraum Λ (der "Phasenraum": eine Mannigfaltigkeit) und einer Menge $\mathcal{A}$ von reell- oder komplexwertigen Funktionen (die "*Observablen*") auf Λ. Ein *klassischer Zustand* ist ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf Λ. Der *Erwartungswert* $E_\mu(A)$ der Observablen $A \in \mathcal{A}$ bzgl. dem Zustand μ ist die Zahl

$$E_\mu(A) = \int_\Lambda A(\lambda)\, d\mu(\lambda). \tag{11}$$

Durch $(A \cdot B)(\lambda) := A(\lambda)B(\lambda)$ erhalten wir aus bestehenden Observablen neue Observable. Im Folgenden betrachten wir ein zusammengesetztes System $\Sigma = \Sigma_1 \vee \Sigma_2$. Der Zustandsraum von Σ ist $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$. Wir nennen eine Observable A des zusammengesetzten Systems Σ *lokal* bzgl. Σ_1, falls eine Observable $A_1 \in \mathcal{A}_1$ existiert, so dass $A(x,y) = A_1(x)$ für alle $x \in \Lambda_1$ und $y \in \Lambda_2$.

Theorem [Bellsche Ungleichung[2]] Nehme an, ein physikalisches System $\Sigma = \Sigma_1 \vee \Sigma_2$ sei durch eine klassische Theorie mit Zustandsraum $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ beschrieben. Die Observablen auf Σ bilden eine nicht weiter spezifizierte Menge $\mathcal{A}$ reellwertiger Funktionen $A : \Lambda \to \mathbb{R}$. Des weiteren seien A_1, A_2, B_1 und B_2 Observable mit den folgenden Eigenschaften:

1. Der Wertebereich der Observablen A_1, A_2, B_1 und B_2 ist $\{\pm 1\}$.
2. Die Observablen A_1, A_2 sind lokal bzgl. Σ_1.
3. Die Observablen B_1, B_2 sind lokal bzgl. Σ_2.

Dann gilt:

$$|E_\mu(A_1 \cdot B_1) + E_\mu(A_2 \cdot B_1) + E_\mu(A_1 \cdot B_2) - E_\mu(A_2 \cdot B_2)| \leq 2 \tag{12}$$

für alle Zustände μ.

[2] Genau genommen ist dies die sog. *CHSH-Ungleichung*: sie ist die heutzutage am häufigsten verwendete Formulierung der ursprünglichen Bellschen Ungleichung

(a) Beweise diese Behauptung.

Wir gehen nun über zur *quantenmechanischen* Beschreibung eines Experiments, mit dem Ziel die Gültigkeit der Bellschen Ungleichung im Rahmen der Quantenmechanik zu prüfen. Das betrachtete physikalische System besteht aus zwei unterscheidbaren Spin-1/2 Teilchen. Wir gehen davon aus, dass im Experiment die folgenden Punkte berücksichtigt werden:

1. Der Zustand der Spin-Freiheitsgrade der Teilchen ist
$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_\uparrow \otimes u_\downarrow - u_\downarrow \otimes u_\uparrow \right),$$
wobei $u_\uparrow, u_\downarrow \in \mathbb{C}^2$ Eigenzustände des Spinoperators S_3 sind: $S_3 u_\uparrow = +\frac{\hbar}{2} u_\uparrow$, $S_3 u_\downarrow = -\frac{\hbar}{2} u_\downarrow$.

2. Das zur Verfügung stehende Experiment erlaubt die Messung der Observablen
$$A_1 := \sigma_3 \otimes \mathbb{I}, \quad A_2 := \sigma_1 \otimes \mathbb{I}$$
und
$$B_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{I} \otimes \sigma_3 + \mathbb{I} \otimes \sigma_1), \quad B_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{I} \otimes \sigma_3 - \mathbb{I} \otimes \sigma_1).$$

3. Die Messung von A_1 resp, A_2 beeinflusst nicht das Ergebnis der Messung von B_1 resp. B_2 (und umgekehrt), falls die zweite Messung kurz nach der ersten erfolgt.

Die klassische Observable $A \cdot B$ $(A, B \in \mathcal{A})$ entspricht der quantenmechanischen Observablen AB $(A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Demnach entspricht der quantenmechanische Ausdruck

$$|\omega(A_1 B_1) + \omega(A_2 B_1) + \omega(A_1 B_2) - \omega(A_2 B_2)| \tag{13}$$

(ω bezeichnet einen beliebigen quantenmechanischen Zustand) dem klassischen Ausdruck, der auf der linken Seite der Bellschen Ungleichung (12) auftritt.

(b) Die Aussage "die Quantenmechanik verletzt die Bellsche Ungleichung" bedeutet, dass (13) betragsmässig nicht ≤ 2 ist. Zeige dies unter Annahme des geschilderten Experiments.

Wir folgern, dass *die quantenmechanische Beschreibung des beschriebenen Experiments nicht durch eine lokale klassische Theorie reproduziert werden kann.* Die tatsächliche experimentelle Überprüfung der Verletzung der Bellschen Ungleichung und die Bestätigung der Vorhersagen der Quantenmechanik gelang A. Aspect, J. Dalibard und G. Roger im Jahr 1982.