ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Quantenmechanik I
Lösungsblatt 1

HS 09
Prof. J. Fröhlich

Exercise 1.1 Hohlraumstrahlung

(a) Die Maxwell-Gleichungen im Vacuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) lauten
homogen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

inhomogen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Mit (1) sehen wir, dass wir $\vec{B}$ und $\vec{E}$ ausdrücken können als $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$, mit dem Vektorpotenzial $\vec{A}$ und dem Skalarpotenzial ϕ. Aus (2) folgt nun eine Wellengleichung für $\vec{A}$,

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = 0 \tag{3}$$

Für einen Kubus mit den Dimensionen $0 \leq x_i \leq L$, $i = 1, 2, 3$ folgen somit die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{A}(0, x_2, x_3, t) &= \vec{A}(L, x_2, x_3, t) \\ \vec{A}(x_1, 0, x_3, t) &= \vec{A}(x_1, L, x_3, t) \\ \vec{A}(x_1, x_2, 0, t) &= \vec{A}(x_1, x_2, L, t). \end{aligned}$$

Wir können nun $\vec{A}$ in eine Fourierreihe entwickeln,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k} \in K} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(\vec{k}, t)\vec{\Sigma}(j, \vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{4}$$

wobei

$$K = \left\{ \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) | n_i \in \mathbb{Z} \right\} \tag{5}$$

und $\vec{\Sigma}$ bilden ein VONS für jedes $\vec{k} \in K$ ($\vec{\Sigma}(3, \vec{k}) = \hat{k}$, $\vec{\Sigma}(1, \vec{k})$ und $\vec{\Sigma}(2, \vec{k}) \perp \vec{\Sigma}(3, \vec{k})$ und orthogonal zueinander). Aus der Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) folgt nun

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k} \in K} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(\vec{k}, t)[\vec{\Sigma}(j, \vec{k}) \cdot \vec{\nabla}]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \equiv 0 \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(\vec{k}, t)[\vec{\Sigma}(j, \vec{k}) \cdot \vec{k}] \equiv 0 \qquad \forall\, \vec{k} \in K \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_3(\vec{k}, t) = 0 \qquad \forall\, \vec{k} \in K,\ \vec{k} \neq 0 \tag{8}$$

(Daher auch der Name 'transversale Eichung').
Damit folgt für $\vec{A}$ nun die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = \sum_{\vec{k}}\sum_{j=1,2}[\frac{1}{c^2}\ddot{\alpha}_j(\vec{k},t) + \vec{k}^2\alpha_j(\vec{k},t)]\Sigma(j,\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0 \tag{9}$$

womit wir für jedes $\vec{k}$ einen harmonischen Oszillator lösen müssen,

$$\ddot{\alpha}_j(\vec{k},t) + \omega_{\vec{k}}^2\alpha_j(\vec{k},t) \qquad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}| \text{ und } \mathrm{j} = 1,2. \tag{10}$$

Um die spektrale Dichte der Oszillatoren zu berechnen, betrachten wir zuerst die Anzahl Moden, die in einer Kugel mit Radius $|\vec{k}| = \omega/c$ sind,

$$N(\omega) = \left\{(\vec{k},j)\middle||\vec{k}| < \frac{\omega}{c},\ j = 1,2\right\} = 2\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3\frac{1}{(2\pi/L)^3}. \tag{11}$$

Der Faktor $(2\pi/L)^3$ entspricht dem Volumen eines einzelnen $\vec{k}$'s.
Die Dichte der Oszillatoren mit der Frequenz ω findet man leicht durch Ableiten des obigen Ausdrucks,

$$n(\omega) = \frac{1}{L^3}\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^3}{3\pi^2c^3}\right) = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}. \tag{12}$$

(b) Für konstantes T findet man die Frequenz ω_*, die die spektrale Energiedichte maximiert mit

$$\left.\frac{\partial u(\omega,T)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_*} = 3\omega_*^2 f(\frac{\omega_*}{T}) + \frac{\omega_*^3}{T}f'(\frac{\omega_*}{T}) = 0. \tag{13}$$

Dies können wir noch umschreiben zu

$$0 = 3f(\frac{\omega_*}{T}) + \frac{\omega_*}{T}f'(\frac{\omega_*}{T}) = 3f(b) + bf'(b). \tag{14}$$

Vorausgesetzt diese Gleichung besitzt eine Lösung, die u maximiert, diese ist universell und damit gilt für jede Temperatur T, dass die zugehörige Frequenz $\omega_* = bT$.

Exercise 1.2 Stefan-Boltzmann Gesetz

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$u = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \tag{15}$$

und der Maxwell'sche Spannungstensor

$$T_{ik} = \{\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{ik} - E_iE_k - B_iB_k\} \tag{16}$$

lässt sich zerlegen in

$$T_{ik} = p\delta_{ik} + T_{ik}^0. \tag{17}$$

Hier ist p der Strahlungsdruck und $\mathrm{SpT}^0 = 0$. Damit finden wir für dir Spur

$$\mathrm{SpT} = \frac{3}{2}(\tilde{\mathrm{E}}^2 + \tilde{\mathrm{B}}^2) - \tilde{\mathrm{E}}^2 - \tilde{\mathrm{B}}^2 = \mathrm{u} = 3\mathrm{p}. \tag{18}$$

Aus dem 1. und 2. Hauptsatz folgt

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q - pdV = TdS - pdV \\ \Rightarrow \quad dS &= \frac{dU + pdV}{T} = \frac{3d(pV) + pdV}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT. \end{aligned} \tag{19}$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = 4\frac{p}{T}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 3\frac{V}{T}\frac{\partial p}{\partial T} \tag{20}$$

Aus der Integrabilität ($\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$) folgt damit

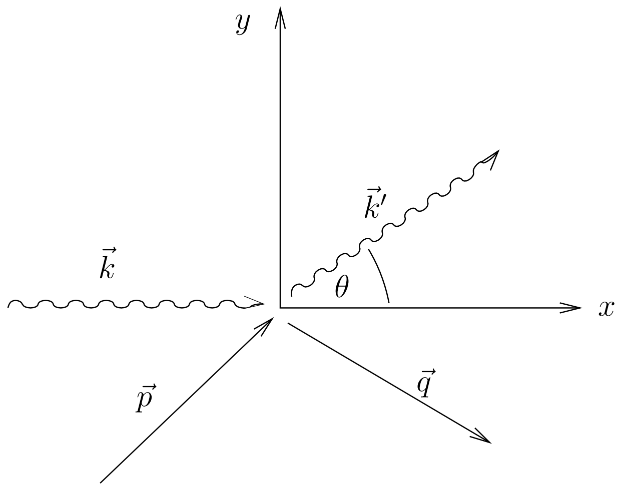
$$\frac{\partial}{\partial T}(4\frac{p}{T}) = \frac{3}{T}\frac{\partial p}{\partial T} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{4}{T}p. \tag{21}$$

Nach Integration beider Seiten finden wir damit

$$p(T) \propto T^4 \Rightarrow u(T) \propto T^4. \tag{22}$$

Exercise 1.3 Compton Effekt

Kollision zwischen einem Photon und einem Elektron:



Vor der Kollision:

- Photon: $E = h\nu = \hbar\omega$, $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$, $\omega = ck$
- Elektron ist in Ruhe, $p_x = p_y = 0$.

Aus der Impulserhaltung folgt

$$\begin{aligned} \frac{h}{\lambda} &= q_x + \frac{h}{\lambda'}\cos\theta \Rightarrow q_x = h(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda'}) \\ 0 &= q_y + \frac{h}{\lambda'}\sin\theta \Rightarrow q_y = -h\frac{\sin\theta}{\lambda'} \end{aligned} \tag{23}$$

und aus der Energieerhaltung

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda} = c\sqrt{(mc)^2 + q_x^2 + q_y^2} + \frac{hc}{\lambda'}. \tag{24}$$

Damit finden wir

$$
\begin{aligned}
[mc + h(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'})] &= (mc)^2 + q_x^2 + q_y^2 &(25)\\
&= (mc)^2 + h^2(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda'})^2 + h^2\frac{\sin^2\theta}{\lambda'^2} &(26)
\end{aligned}
$$

und schliesslich

$$
mch\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} - h^2\frac{1-\cos\theta}{\lambda\lambda'} = 0. \tag{27}
$$

Mit Hilfe der Identität $1 - \cos\theta = -2\sin^2\frac{\theta}{2}$ folgt die Beziehung

$$
\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = h\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{mc}. \tag{28}
$$