Quantenmechanik I
Lösungsblatt 11

HS 2009
Prof. Fröhlich

Exercise 11.1 Das Theorem von Peter und Weyl im Spezialfall $G = SU(2)$

(a) Die Sphäre S^3 ist eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^4$ und die Polarkoordinaten

$$\varphi(\theta,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\beta \\ \sin\theta\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\theta\sin\beta\sin\gamma \end{pmatrix} \tag{1}$$

bilden zusammen mit dem Gebiet $(\theta,\beta,\gamma) \in [0,\pi) \times [0,\pi) \times [0,2\pi) \subset \mathbb{R}^3$ eine Karte für die Sphäre S^3. Die zur Abbildung φ gehörende Gramsche Matrix $G(x)$ ergibt sich aus

$$G(x) = d\varphi^T d\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\theta\sin^2\beta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Das über φ induzierte Mass in der Karte ist also

$$d\tilde{\Omega}(\theta,\beta,\gamma) = \sqrt{\det G(x)}\, d\theta d\beta d\gamma = \sin^2\theta\sin\beta\, d\theta d\beta d\gamma \tag{3}$$

Die sich ergebende Gesamtoberfläche von S^3 ist $2\pi^2$. Die Normierung von $\tilde{\Omega}$ ergibt somit das gesuchte Mass

$$d\Omega(\theta,\beta,\gamma) = \frac{1}{2\pi^2}\sin^2\theta\sin\beta\, d\theta d\beta d\gamma. \tag{4}$$

(b) Im folgenden bezeichnet $\mathcal{K} \subset L^2(SU(2),\mu)$ der lineare Unterraum der Klassenfunktionen auf $SU(2)$. Wenn wir berücksichtigen, dass die Klassenfunktionen $F \in \mathcal{K}$ nur Funktionen in $\alpha \in [0,\pi)$ sind, lässt sich das von μ festgelegte Skalarprodukt auf dem linearen Unterraum $\mathcal{K}$ wie wir nun sehen werden explizit durch α alleine ausdrücken. Aus $\mu(A) = \nu(\Phi^{-1}(A))$ (A (Borel) messbar) ergibt sich

$$\int_{SU(2)} f(g)\, d\mu(g) = \int_{S^3} f \circ \Phi(x)\, d\nu(x). \tag{5}$$

Sei $F(\alpha) := F(g)$, falls $g \in [\alpha]$. Es gilt also

$$F(\alpha) = F \circ \Phi \circ \varphi(\theta,\beta,\gamma) \tag{6}$$

für alle $(\theta,\beta,\gamma) \in \{(\theta,\beta,\gamma) | \Phi\circ\varphi(\theta,\beta,\gamma) \in [\alpha]\} =: \mathcal{A}_\alpha$. Wie auf dem Übungsblatt angegeben bildet Φ jeden "S^2-Grosskreis" $\{x(\theta,\beta,\gamma) | \theta = \theta_0\}$ in S^3 auf die zugehörige Konjugationsklasse $[\theta_0]$ in $SU(2)$ ab. Dies bedeutet, dass

$$\mathcal{A}_\alpha = \{(\theta,\beta,\gamma) | \theta = \alpha\}, \tag{7}$$

und wir erhalten

$$F \circ \Phi \circ \varphi(\theta,\beta,\gamma) = F(\theta). \tag{8}$$

Also gilt für Klassenfunktionen

$$\begin{aligned}
\int_{SU(2)} F(g)\,d\mu(g) &= \int_{S^3} F\circ\Phi(x)\,d\nu(x) \\
&= \int_{[0,\pi)\times[0,\pi)\times[0,2\pi)} F\circ\Phi\circ\varphi(\theta,\beta,\gamma)\,d\Omega(\theta,\beta,\gamma) \\
&= \int_{[0,\pi)\times[0,\pi)\times[0,2\pi)} F(\theta)\,d\Omega(\theta,\beta,\gamma) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(\theta)\,\sin^2\theta d\theta \\
&=: \int_0^\pi F(\theta)\,d\mu_{\mathcal{K}}(\theta) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen ist Konsequenz von $\mu(A)=\nu(\Phi^{-1}(A))$, das zweite Gleichheitszeichen resultiert aus unserer Beschreibung des Oberflächenmasses auf S^3 anhand der Polarkoordinaten-Parametrisierung φ, und das dritte Gleichheitszeichen ist Folge von (8). Mit Hilfe von diesem expliziten Ausdruck für das Haarsche Mass μ auf dem Raum der Klassenfunktionen erhalten wir sofort den expliziten Ausdruck für das Skalarprodukt zwischen zwei Klassenfunktionen F und G:

$$\langle F,G\rangle = \int_{SU(2)} \overline{F}(g)G(g)\,d\mu(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overline{F}(\alpha)G(\alpha)\,\sin^2(\alpha)d\alpha. \qquad (10)$$

Nach diesen Ausschweifungen sind wir gerüstet für die eigentliche Aufgabe: es ist zu zeigen, dass die Charaktere

$$\chi_j(g) = \frac{\sin(2j+1)\alpha}{\sin\alpha} \qquad (11)$$

($g\in[\alpha]$ beliebig) der irreduziblen Darstellungen D_j von $SU(2)$ ($j=0,1/2,1,3/2,...$) bzgl. dem Skalarprodukt (10) ein VONS im Raum $\mathcal{K}=L^2([0,\pi],\mu_{\mathcal{K}})$ der Klassenfunktionen bilden.

Beweis der Orthonormalität. Zu zeigen ist

$$\langle\frac{\sin(2j+1)\alpha}{\sin\alpha},\frac{\sin(2l+1)\alpha}{\sin\alpha}\rangle = \delta_{jl} \qquad (12)$$

für alle $j,l=0,1/2,1,3/2,....$ Mit $k:=2j+1\in\mathbb{N}_0$ und $n:=2l+1\in\mathbb{N}_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha},\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\,\sin^2\alpha d\alpha \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin k\alpha\sin n\alpha\,d\alpha \qquad (13)
\end{aligned}$$

Weil $\sin k\alpha/\sin\alpha$ eine gerade Funktion ist,erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha},\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \sin k\alpha\sin n\alpha\,d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2i}(e^{ik\alpha}-e^{-ik\alpha})\frac{1}{2i}(e^{in\alpha}-e^{-in\alpha})\,d\alpha \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^\pi(-2)\delta_{nk}\,d\alpha \\
&= \delta_{nk}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Beweis der Vollständigkeit. Zu zeigen ist

$$\langle f,\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}\rangle = 0, \forall k\in\mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; f\equiv 0\ \mu_{\mathcal{K}}\text{-fast überall.} \qquad (15)$$

Wenn wir das Skalarprodukt explizit ausschreiben, ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overline{f}\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}\,\sin^2\alpha d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\overline{f}\sin\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\langle f\sin\alpha, \sin k\alpha\rangle_{L^2([0,\pi],d\alpha)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Aus der Theorie der Fourier-Analyse wissen wir, dass die Funktionen $\{\sin k\alpha\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ein vollständiges orthogonales System in $L^2([0,\pi],d\alpha)$ bilden. Daher impliziert (16), dass

$$f\sin\alpha \equiv 0 \ d\alpha\text{-fast überall,} \tag{17}$$

woraus

$$f\sin\alpha \equiv 0 \ d\mu_{\mathcal{K}}\text{-fast überall.} \tag{18}$$

resp.

$$f \equiv 0 \ d\mu_{\mathcal{K}}\text{-fast überall} \tag{19}$$

folgt. Der Übergang "$d\alpha$-fast überall $\to$ $d\mu_{\mathcal{K}}$-fast überall" (siehe Gleichung (17) und (18)) ist korrekt, wenn Nullmengen bzgl. $d\alpha$ automatisch Nullmengen bzgl. $d\mu_{\mathcal{K}}$ sind. Dies ist in der Tat der Fall: sei $A\subset[0,\pi]$ eine Nullmenge bzgl. $d\alpha$. Dann gilt:

$$0=\int_A d\alpha \geq \int_A d\mu_{\mathcal{K}} = \frac{2}{\pi}\int_A \sin^2\alpha\, d\alpha \Rightarrow \mu_{\mathcal{K}}(A)=0. \tag{20}$$

Exercise 11.2 Die Clebsch-Gordan Reihe für $SU(2)$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\chi_j(U(\alpha)) = \sum_{m=-j}^{j} e^{2im\alpha}. \tag{21}$$

Sei $N^j_{j_1j_2}$ die Multiplizität der Darstellung D_j in der Darstellung $D_{j_1}\otimes D_{j_2}$, d.h.

$$\mathcal{D}_{j_1}\otimes\mathcal{D}_{j_2} = \bigoplus_j \mathcal{D}_j\otimes\mathbb{C}^{N^j_{j_1j_2}}, \tag{22}$$

mit $\mathbb{C}^0 := 0$. Da sich der Charakter additiv unter der Operation "direkte Summe" und multiplikativ unter der Operation "Tensorprodukt" verhält, folgt

$$\chi_{j_1\otimes j_2}(U) = \chi_{j_1}(U)\cdot\chi_{j_2}(U) = \sum_j N^j_{j_1j_2}\chi_j(U). \tag{23}$$

Mit

$$\begin{aligned} \chi_{j_1}(U(\alpha))\cdot\chi_{j_2}(U(\alpha)) &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{2i(m_1+m_2)\alpha} \\ &= \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{m=-j}^{j} e^{2im\alpha} \\ &= \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\chi_j(U(\alpha)) \end{aligned} \tag{24}$$

erhalten wir

$$\chi_{j_1 \otimes j_2}(U) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi_j(U(\alpha)) = \sum_{j=0,1,2,\ldots} N^j_{j_1 j_2} \chi_j(U), \tag{25}$$

und es resultiert die sog. *Clebsch-Gordan Reihe für* $SU(2)$:

$$\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{D}_j. \tag{26}$$

Das zweite Gleichheitszeichen in (24) macht man sich am besten mit einer Skizze für die Häufigkeit der einzelnen Exponentialfunktionen in der Gesamtsumme klar (siehe bspw. Abbildung 1).

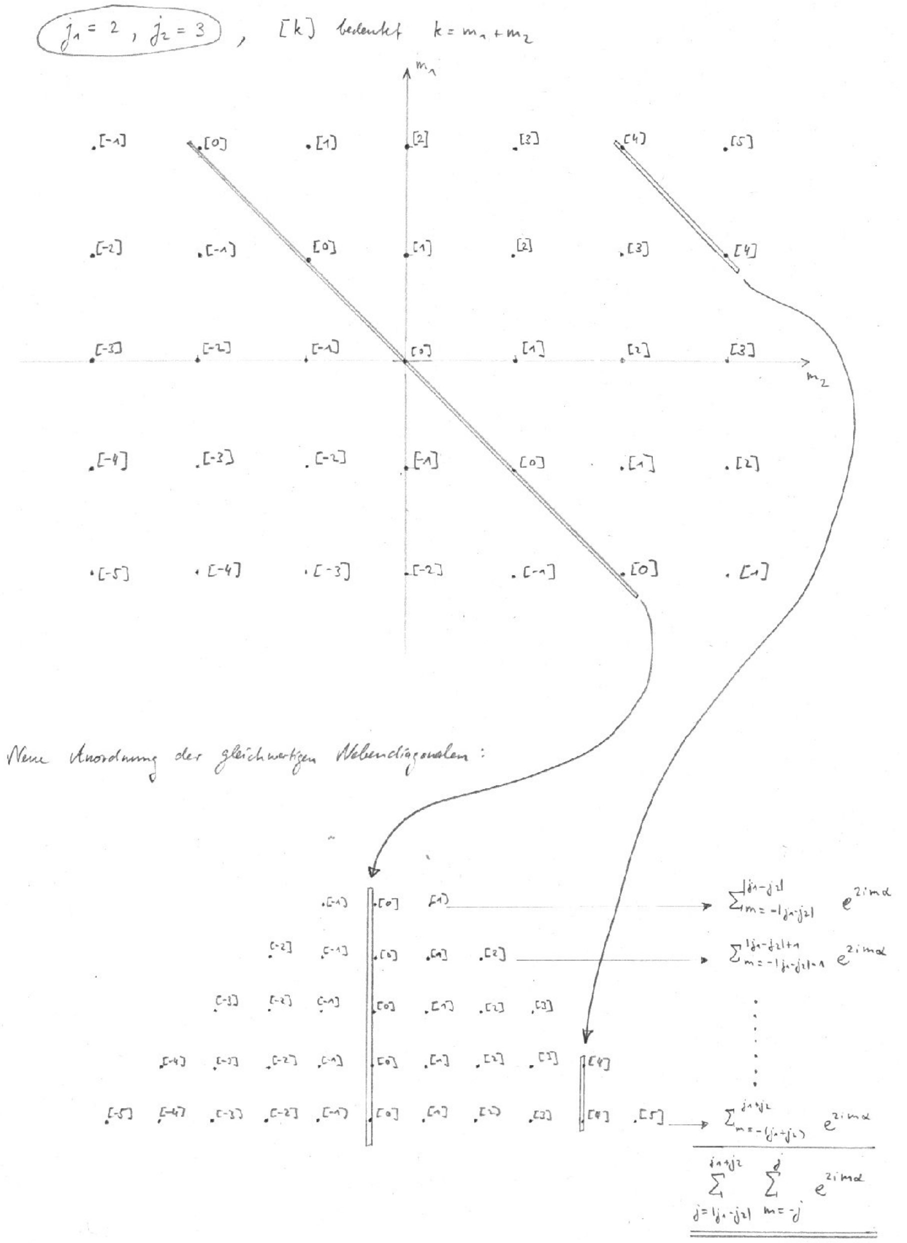

Abbildung 1: Skizze für Aufgabe 11.2

Exercise 11.3 Bellsche Ungleichung

(a) Aus der Linearität des Erwartungswert folgt, dass

$$\begin{aligned} &E_\mu(A_1 \cdot B_1) + E_\mu(A_2 \cdot B_1) + E_\mu(A_1 \cdot B_2) - E_\mu(A_2 \cdot B_2) \\ &= E_\mu(A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_2) \in [m, M], \end{aligned} \tag{27}$$

wobei

$$\begin{aligned} m &:= \min_{\lambda\in\Lambda} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_2 \\ M &:= \max_{\lambda\in\Lambda} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_2. \end{aligned} \tag{28}$$

Zu bestimmen sind also die Werte m und M. Aus $A_1(\lambda), A_2(\lambda) \in \{\pm 1\}$ und $B_1(\lambda), B_2(\lambda) \in \{\pm 1\}$ ergibt sich, dass entweder

$$(A_1(\lambda) + A_2(\lambda))B_1(\lambda) = 0 \Rightarrow (A_1(\lambda) - A_2(\lambda))B_2(\lambda) \in \{\pm 2\}, \tag{29}$$

oder

$$(A_1(\lambda) - A_2(\lambda))B_2(\lambda) = 0 \Rightarrow (A_1(\lambda) + A_2(\lambda))B_1(\lambda) \in \{\pm 2\}. \tag{30}$$

Daraus folgt: $m = -2$ und $M = +2$. Dies beweist die Behauptung.

(b) Zu berechnen ist

$$\begin{aligned} &\omega(A_1B_1) + \omega(A_2B_1) + \omega(A_1B_2) - \omega(A_2B_2) \\ &= \langle \xi, A_1B_1\xi\rangle + \langle \xi, A_2B_1\xi\rangle + \langle \xi, A_1B_2\xi\rangle - \langle \xi, A_2B_2\xi\rangle \end{aligned} \tag{31}$$

mit

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_\uparrow \otimes u_\downarrow - u_\downarrow \otimes u_\uparrow\right),$$

und

$$A_1 := \sigma_3 \otimes \mathbb{I}, \quad A_2 := \sigma_1 \otimes \mathbb{I}$$

resp.

$$B_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{I} \otimes \sigma_3 + \mathbb{I} \otimes \sigma_1), \quad B_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{I} \otimes \sigma_3 - \mathbb{I} \otimes \sigma_1).$$

Wenn man beachtet, dass σ_1 die Spins $u_\uparrow$ und $u_\downarrow$ vertauscht, und dass $\sigma_3 u_\uparrow = u_\uparrow$ resp. $\sigma_3 u_\uparrow = -u_\downarrow$ sind diese Rechnungen sehr rasch erledigt. Man erhält

$$|\omega(A_1B_1) + \omega(A_2B_1) + \omega(A_1B_2) - \omega(A_2B_2)| = 2\sqrt{2}. \tag{32}$$

Dieser Wert ist grösser als die obere Schranke, die in der Bellschen Ungleichung auftritt. Dies zeigt, dass die Quantenmechanik “die Bellsche Ungleichung” verletzt.