ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Theorie der Wärme
Serie 5

HS 09
Prof. G. Blatter

Aufgabe 5.1 Die thermodynamischen Potentiale des idealen Gases

Berechne die Energie $U(S,V)$, die freie Energie $F(T,V)$ und die Gibbs'sche freie Energie $G(T,p)$ für ein Mol eines idealen Gases mit konstanter spezifischer Wärme c_V.
Hinweis: Ein möglicher Ausgangspunkt ist die Entropie $S(U,V)$, gegeben durch

$$S - S_0 = c_V \log \frac{U}{U_0} + R \log \frac{V}{V_0}\,, \tag{1}$$

wobei $U_0 = c_V T_0$ die Energie im Referenzzustand (T_0, V_0) ist. Nutze die Definition der freien Energie und der Gibbs'schen freien Energie aus der Vorlesung und drücke S bzw. V durch die entsprechenden konjugierten Variablen aus.

Aufgabe 5.2 Legendre Transformation

Die Legendre Transformation der Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$f^*(p) = (\mathcal{L}f)(p) = \sup_x [xp - f(x)].$$

Die Definition macht nur für konvexe Funktionen $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$, $\lambda \in [0,1]$, Sinn, da die Transformation sonst nicht umkehrbar ist.

In der Thermodynamik ist die Legendre Transformation $\mathcal{L}$ bei der Behandlung von Potentialen wichtig. Sie erlaubt es, von Potentialen $U(S,V)$, abhängig von extensiven Parametern, S,V, auf Potentiale, $G(T,p)$, die von intensiven Gleichgewichtsparametern, T,p abhängen, überzugehen. Die Transformation tritt auch in der klassischen Mechanik beim Übergang vom Lagrange- zum Hamiltonformalismus auf und in der ED, wenn man bei Kapazitätsnetzwerken von der Ladung Q auf das elektrische Potential U wechselt.

1. Wie kann man die Legendre Transformation geometrisch verstehen? Wie sieht die geometrische Rücktransformation aus?

2. Zeige, $f^*(p)$ is konvex. Betrachte dazu $f^*(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)$.

3. Falls f stetig differenzierbar und strikt konvex, zeige, dass

   $$f^*(p) = xp - f(x)$$

   mit $p = f'(x)$, d.h. die Legendre Transformation wechselt von x zu $f'(x)$ als unabhängiger Variablen.

4. Falls f stetig differenzierbar und strikt konvex, zeige, dass

   $$f^{**}(x) = f(x).$$

   Wende dazu die Legendre Transformation auf $f^*(p)$ an.

5. Berechne $f^*(\mathbf{p})$ für

   $$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\mathbf{x} + c,$$

   wobei A eine symmetrische $N \times N$ Matrix und c eine Konstante ist.

6. Berechne $f^*(p)$ und $f^{**}(x)$ für $f(x) = c\exp(x)$ und vergleiche das Resultat mit der naiven Transformation $F(p) = f(x)$ mit $p = f'(x)$. Wie sieht die Rücktransformation der allgemeinen naiven Transformation aus und warum ist sie nicht eindeutig?

7. Berechne $f^*(p)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \leq 1 \\ x - 1/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 7/2 & 2 \leq x \end{cases} .$$

8. Berechne die Legendre Transformierte $f^*(p)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 5/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 7/2 & 2 \leq x \end{cases} ,$$

die nicht konvex ist. Wie sieht die rücktransformierte Funktion $f^{**}(x)$ aus?