Theorie der Wärme
Serie 11

Aufgabe 11.1 Idealer Paramagnet: Statistische Behandlung

Betrachte ein System von N identischen lokalen magnetischen Momenten $\vec{\mu}$ (klassisch und nicht wecheselwirkend). Die Momente können sich nur in z-Richtung ausgerichten, d.h. $\vec{\mu_i} = \sigma_i \mu \vec{e_z}$ mit $\sigma_i = \pm 1$. Alle möglichen Konfigurationen des Systems entsprechen dann gerade allen möglichen Mengen $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$. In einem äusseres Magnetfeld $\vec{H} = H\vec{e}_z$ ist die Energie einer solchen Konfiguration gegeben durch den Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -\sum_i \sigma_i \mu H.$$

a) Berechne die innere Energie $U = \langle \mathcal{H} \rangle$ des Systems, sowie die spezifische Wärme c_H.

   Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit einer Konfiguration ist proportional zum *Boltzmann-Faktor*,

   $$P(\{\sigma_i\}) \propto e^{-\beta\mathcal{H}},\ \beta = \frac{1}{k_B T},$$

   und für das mikroskopische System gilt $du = \delta Q - MdH$.

b) Berechne weiter die mittlere Magnetisierung $\langle M \rangle$ und die magnetische Suszeptibilität $\chi = (\partial \langle M \rangle / \partial H)|_T$.

c) Untersuche das Verhalten von c_H, χ und $\langle M \rangle$ in den Limites $\beta\mu H \to 0, \infty$. Interpretiere die Resultate.

Aufgabe 11.2 Wärme- und Ladungstransport im Elektronengas

In der Vorlesung wurde der Wärmetransport in einem klassischen Gas aus elektrisch neutralen Teilchen behandelt. In dieser Aufgabe behandeln wir nun elektrisch geladene Teilchen, wodurch zusätzlich ein Ladungstransport entsteht.

Betrachte ein Elektronengas, dessen Gleichgewichtsverteilung gegeben ist durch

$$f_0(\mu, T, \mathbf{v}) = \left(e^{[\varepsilon(\mathbf{v}) - \mu]/k_\mathrm{B}T} + 1\right)^{-1}, \quad \text{wobei} \quad \varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{mv^2}{2}.$$

Dies ist die sogenannte Fermi-Verteilung. *Sie wird im Skript im Kap. 11.2.1 mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung hergeleitet. Der verwendete Stosszahlansatz berücksichtigt das Pauliprinzip, d.h. Streuung in ein besetzes Phasenraumvolumen ist untersagt.*
Analog zum Skript definieren wir die *lokale Fermiverteilung* $f_{l0}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ indem wir $T = T(\mathbf{r})$ und $\mu = \mu(\mathbf{r})$ setzen.

a) Löse die *linearisierte Boltzmann Transportgleichung im Relaxationszeitansatz*,

   $$[\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_\mathbf{r} + (\mathbf{F}/m) \cdot \nabla_\mathbf{v}] f_{l0} = -\frac{f - f_{l0}}{\tau} \equiv -\frac{g}{\tau}, \tag{1}$$

   (d.h. finde g) in einem statischen (d.h. zeitunabhängigen) äusseren elektrischen Feld $\mathbf{E}$. Auch $\mu(\mathbf{r})$ und $T(\mathbf{r})$ sollen als zeitunabhängig angenommen werden.

b) Berechne den Wärmestrom $\mathbf{j}_{\text{Wärme}}$ und den elektrischen Strom $\mathbf{j}_{\text{EM}}$. Die Ströme sind gegeben durch

$$\mathbf{j}_{\text{EM}} = \int \frac{d^3k}{4\pi^3}(-e)\mathbf{v}f(\mathbf{v}),$$
$$\mathbf{j}_{\text{Wärme}} = \int \frac{d^3k}{4\pi^3}[\varepsilon(\mathbf{v}) - \mu]\mathbf{v}f(\mathbf{v}),$$

mit $e > 0$, wobei $\hbar\mathbf{k} = m\mathbf{v}$ und der Faktor im Nenner vom Mass im quantenmechanischen Zustandsraum herrührt (inklusive Faktor 2 wegen des Spins). Mit $\mathcal{E} = \mathbf{E} + \nabla\mu/e$ können wir die Ströme umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{EM}} \\ \mathbf{j}_{\text{Wärme}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ -(\nabla T)/T \end{pmatrix}.$$

Berechne die Koeffizienten L_{kl} und zeige explizit, dass $L_{12} = L_{21}$ gilt (Onsager-Casimir Beziehung).

c) Zeige, dass das *Wiedemann-Franz Gesetz* für das Verhältnis von thermischer und elektrischer Leitfähigkeit gilt, d.h., dass

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{\pi^3 k_B^2}{3e^2}T.$$

Hinweis: Die Leitfähigkeiten sind definiert durch $\mathbf{j}_{\text{EM}} = \sigma\mathcal{E}$ und $\mathbf{j}_{\text{Wärme}} = \varkappa\nabla T$. Jeweils andere 0?